Übungsblatt 8

Abgabe: Freitag, 31.5.2019, 12:00 Uhr (blauer Briefkasten vor 03-222).
Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 8.1

Zeigen Sie, dass für die Zahlen $s_1, \ldots, s_d$ aus Satz 4.6.4 gilt:

$$s_l = \dim U_l - \dim U_{l-1} - \dim W_{l+1}.$$

Aufgabe 8.2

a) Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Für ein $x \in V$ gelte $V = \langle x, F(x), \ldots, F^{n-1}(x)\rangle$. Seien $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$, sodass

$$F^n(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 F(x) + \ldots + \lambda_{n-1} F^{n-1}(x).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von F.

b) Zeigen Sie, dass es für jedes Polynom $p \in K[x]$ vom Grad $n \geq 1$ eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ gibt, sodass $p(A) = 0$.

Aufgabe 8.3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Folgen Sie dem Beweis von Satz 4.6.1:

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Bestimmen Sie die Eigen- und Haupträume von A.

c) Finden Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ und eine Blockdiagonalmatrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, deren Blöcke den Haupträumen von A entsprechen, sodass $A = S^{-1}BS$.

d) Nutzen Sie das Resultat aus c), um eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie eine nilpotente Matrix $N \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ zu finden, sodass $A = T^{-1}(D + N)T$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 8.4
Seien $A, B \in K^{n\times n}$ mit $AB = BA$.

a) Zeigen Sie, dass
$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} A^k B^{m-k}$$
für alle $m \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Nutzen Sie die Rekursion
$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}$$
für $1 \leq k \leq m$.

b) Zeigen Sie, dass $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

c) Sei
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
Berechnen Sie $\exp(A)$.

Aufgabe 8.5
Sei V ein nicht-trivialer Vektorraum und sei F ein Endomorphismus von V mit $\mathrm{Im}(F) = \ker(F)$.

a) Bestimmen Sie den Rang und die Eigenwerte von F.

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von F.

c) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von F, d.h. eine Darstellungsmatrix $D+N$ von F, wobei $D \in K^{n\times n}$ diagonal und $N \in K^{n\times n}$ nilpotent von der Form der Matrix $M_B(G)$ in Satz 4.6.4 (s. Satz 4.6.5 im Skript bzw. Vorlesung am Mittwoch).