Übungsblatt 9

Abgabe: Donnerstag, 6.6.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 9.1

Sei F ein Endomorphismus von $\mathbb{R}^7$ mit charakteristischem Polynom

$$P_F = (t^2+1)^2(t-2)(t^2-1) \in \mathbb{R}[t].$$

Nutzen Sie die Sätze 4.5.3 und 4.6.5, um eine möglichst einfache Matrixdarstellung von F anzugeben.

Aufgabe 9.2

Sei K ein Körper und sei $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie:

a) Ist A invertierbar, dann existiert ein Polynom $Q \in K[t]$, sodass $A^{-1} = Q(A)$.

b) A ist genau dann invertierbar, wenn es $a_1, \ldots, a_m \in K$ gibt, sodass $E_n = \sum_{i=1}^m a_i A^i$.

Hinweis: Betrachten Sie das charakteristische Polynom.

Aufgabe 9.3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Gehen Sie wie in den Beweisen der Sätze 4.6.4 und 4.6.5 vor, um eine Basis bestimmen, bezüglich derer A Jordansche Normalform hat. Geben Sie die Jordansche Normalform von A an.

Aufgabe 9.4

Fertigen Sie eine Tabelle an, die für die folgenden Eigenschaften von Matrizen angibt, unter welchen Operationen diese erhalten bleiben. Geben Sie auch möglichst immer die Stelle im Skript an, wo das entsprechende Problem diskutiert wird.

Eigenschaften: Kern, Bild, Rang, Spur, Determinante, charakteristisches Polynom, Diagonalisierbarkeit, Trigonalisierbarkeit, Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume, Haupträume, Jordansche Normalform.

Operationen: Jede der ihnen bekannten elementaren Zeilenoperationen, Spaltenoperationen, Ähnlichkeitstransformation (d.h. $A \mapsto SAS^{-1}$ für $S \in \mathrm{GL}(n,K)$), Quadrieren ($A \mapsto A^2$), Verdopplen ($A \mapsto 2A$).

Aufgabe 9.5

Sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$ und sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass sich jede Bilinearform auf V eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Bilinearform auf V darstellen lässt.