Übungsblatt 10

Abgabe: Donnerstag, 13.6.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 10.1

Beweisen Sie die komplexe Polarisierungsformel: Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V und sei q die zugehörige quadratische Form. Dann gilt:

$$s(v, w) = \frac{1}{4}(q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw))$$

für alle $v, w \in V$.

Aufgabe 10.2

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine *komplexe Struktur* auf V ist ein Endomorphismus J von V mit $J^2 = -\operatorname{Id}_V$.

a) Geben Sie ein Beispiel für eine komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^2$ an.

b) Sei J eine komplexe Struktur auf V. Zeigen Sie, dass V zusammen mit der Skalarmultiplikation
$$\mathbb{C} \times V \to V, \quad ((a+ib), v) \mapsto av + bJ(v),$$
einen $\mathbb{C}$-Vektorraum bildet.

c) Zeigen Sie, dass ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer komplexen Struktur gerade Dimension hat.

Aufgabe 10.3

Sei V ein euklidischer/unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und induzierter Norm $\|\ \|$. Zeigen Sie, dass für $v, w \in V$ die folgenden (Un-)Gleichungen gelten:

a) Die Parallelogrammgleichung: $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.

b) Der Satz des Pythagoras: Falls $\langle v, w\rangle = 0$, so ist $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v+w\|^2$.

c) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$ mit Gleichheit genau dann, wenn (v, w) linear abhängig ist.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 10.4

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Eine Bilinearform s auf V heißt *nicht entartet*, falls es für jedes $v \in V \setminus \{0\}$ ein $w \in V$ gibt, sodass $s(v, w) \neq 0$.

Für $v \in V$ definieren wir eine lineare Abbildung

$$\phi_v \colon V \to K, \quad w \mapsto s(v, w).$$

Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{\phi_v \mid v \in V\}$$

einen K-Vektorraum bildet. Beschreiben Sie diesen Vektorraum möglichst genau für den Fall, dass s nicht entartet ist.

Bonuspunkt:

a) Zeigen Sie, dass s genau dann nicht entartet ist, wenn es für jedes $w \in V \setminus \{0\}$ ein $v \in V$ gibt, sodass $s(v, w) \neq 0$.
Hinweis: Betrachten Sie analog zu ϕ_v für $w \in V$ die lineare Abbildung

$$\psi_w \colon V \to K, \quad v' \mapsto s(v', w).$$

Charakterisieren Sie den Fall, dass s nicht entartet ist, mit Hilfe der Abbildungen $v \mapsto \phi_v$ und $w \mapsto \psi_w$ und zeigen Sie, dass $\operatorname{rang}(v \mapsto \phi_v) = \operatorname{rang}(w \mapsto \psi_w)$.

b) Charakterisieren Sie den Fall, dass s nicht entartet ist, mit Hilfe der darstellenden Matrix.

Aufgabe 10.5

Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathbb{R}^{2n} &\to \mathbb{C}^n, \\ (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) &\mapsto (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n). \end{aligned}$$

Weiter sei $\langle\ ,\ \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2n}$, $\langle\ ,\ \rangle_c$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ und $\|\ \|$ sowie $\|\ \|_c$ seien die jeweils induzierten Normen.

a) Zeigen Sie, dass es eine antisymmetrische Bilinearform $s \colon \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\langle \phi(v), \phi(v') \rangle_c = \langle v, v' \rangle - is(v, v')$$

für alle $v, v' \in \mathbb{R}^{2n}$.

b) Zeigen Sie, dass s nicht entartet ist.

c) Zeigen Sie, dass $\|\phi(v)\|_c = \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^{2n}$.