Übungsblatt 11

Abgabe: Donnerstag, 20.6.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 11.1

Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ der Polynome vom Grad höchstens 3 sei das folgende Skalarprodukt definiert:

$$s\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \times \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von s bezüglich der Basis $(1, t, t^2, t^3)$ sowie eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 11.2

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei Z der Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, der von den Zeilen von A aufgespannt wird. Bestimmen Sie $Z^\perp$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts.

Aufgabe 11.3

Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und sei F ein Endomorphismus von V mit $\langle F(x), x\rangle = 0$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass F dann die Nullabbildung ist.

Aufgabe 11.4

Seien V und W zwei endlichdimensionale euklidische/unitäre Vektorräume mit Skalarprodukten $\langle\ ,\ \rangle_V$ und $\langle\ ,\ \rangle_W$. Zeigen Sie, dass es zu jeder linearen Abbildung $F\colon V \to W$ genau eine lineare Abbildung $F^\dagger\colon W \to V$ gibt, sodass

$$\langle F(x), y\rangle_W = \langle x, F^\dagger(y)\rangle_V$$

für alle $x \in V$ und $y \in W$. Die Abbildung $F^\dagger$ heißt die *adjungierte Abbildung* zu F.

Zeigen Sie außerdem: Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Orthonormalbasen von V bzw. W, so gilt

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F^\dagger) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F))^\dagger$$

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 11.5

Sei $V \neq 0$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und sei F ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $F^\dagger = -F$.

b) Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von F und der Realteil aller Eigenwerte ist Null.