Übungsblatt 12

Abgabe: Donnerstag, 27.6.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 12.1

Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Permutationsmatrix*, falls es eine Permutation $\sigma \in S_n$ gibt, sodass $A = E_\sigma := (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$.

a) Zeigen Sie, dass jede Permutationsmatrix invertierbar ist und dass die Abbildung

$$S_n \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \sigma \mapsto E_\sigma,$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

b) Zeigen Sie, dass $E_\sigma \in O(n)$ für alle $\sigma \in S_n$.

c) Sei $A = (a_{ij}) \in O(n)$ eine orthogonale Matrix mit Einträgen $a_{ij} \geq 0$. Zeigen Sie, dass A eine Permutationsmatrix ist.

Aufgabe 12.2

Sei $A = (a_{ij}) \in O(n)$ eine orthogonale Matrix in unterer Dreiecksgestalt, d.h. $a_{ij} = 0$ für $i < j$. Zeigen Sie, dass A eine Diagonalmatrix ist. Gilt eine entsprechende Aussage auch für unitäre Matrizen $A \in U(n)$?

Aufgabe 12.3

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum und sei F ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus von V. Zeigen Sie, dass F die Nullabbildung ist.

Aufgabe 12.4

Seien F und G zwei selbstadjungierte Endomorphismen eines endlichdimensionalen euklidischen/unitären Vektorraums V. Zeigen Sie, dass $F \circ G$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn $F \circ G = G \circ F$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 12.5

Sei V ein euklidischer/unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus F von V heißt *normal*, falls $F \circ F^\dagger = F^\dagger \circ F$.

a) Zeigen Sie, dass ein orthogonaler/unitärer Endomorphismus normal ist.

Sei F ein normaler Endomorphismus von V.

b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$ und sei $x \in V$. Zeigen Sie, dass $x \in \mathrm{Eig}(F, \lambda)$ genau dann, wenn $x \in \mathrm{Eig}(F^\dagger, \overline{\lambda})$.

c) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $\lambda \neq \mu$ und seien $x \in \mathrm{Eig}(F, \lambda)$ und $y \in \mathrm{Eig}(F, \mu)$. Zeigen Sie, dass $x \perp y$.