# Klausur

**Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und ihre Matrikelnummer**

Name: MatNr.:

Punkte:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| von | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |

## Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Sie brauchen hier keine Begründung ihrer Antwort angeben. Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, jede falsche Antwort einen Minuspunkt. Die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe kann jedoch nicht negativ werden.

1. Jede quadratische Matrix kann durch Anwenden von elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen auf Diagonalgestalt gebracht werden.
2. Sei $D$ eine Diagonalmatrix und $T$ eine obere Dreiecksmatrix. Dann gilt $TD = DT$.
3. Sei $D$ eine Diagonalmatrix und $A$ eine beliebige Matrix. Dann gilt $AD = DA$.
4. Jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen $\mathbb{F}_2$-Vektorraums ist diagonalisierbar ($\mathbb{F}_2$ bezeichnet den Körper mit 2 Elementen).
5. Jede komplexe $(n \times n)$-Matrix besitzt eine Basis aus Eigenvektoren.
6. Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist diagonalisierbar.
7. Die Determinante $\det : \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist stetig.
8. Wenn die erste Zeile einer $(n \times n)$-Matrix mit $\lambda \neq 0$ multipliziert wird, dann ändert sich die Determinante um den Faktor $\lambda^n$.
9. Wenn die Diagonale einer $(n \times n)$-Matrix mit $\lambda \neq 0$ multipliziert wird, dann ändert sich die Determinante um den Faktor $\lambda^n$.
10. Alle Eigenwerte einer Matrix $A \in U(n)$ sind reell.
11. Für jede Bilinearform $s$ auf einem euklidischen Vektorraum $V$ gilt $s(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$.
12. Für jedes Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ auf einem unitären Vektorraum $V$ gilt $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$.

## Aufgabe 2

Beantworten Sie folgende Fragen knapp:

1. Was ist das Signum einer Permutation?
2. Wie lautet der Laplacesche Entwicklungssatz?
3. Wann ist ein Endomorphismus trigonalisierbar, d.h. wann existiert eine Basis, in der die Darstellungsmatrix eine obere Dreieicksmatrix ist?
4. Was sagt das Vorzeichen der Determinante über einen Endomorphismus eines reelen Vektorraums aus?

## Aufgabe 3

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Q}).$$

## Aufgabe 4

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

- Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von $A$.
- Ist $A$ diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie die Matrix $S$ und die Diagonalmatrix $D$ an, für die gilt $SAS^{-1} = D$.

## Aufgabe 5

Sei $F$ ein Automorphismus eines endlichdimensionalen $K$-Vektorraums $V$. Zeigen Sie, dass ein Polynom $P \in K[t]$ existiert, für das gilt $F^{-1} = P(F)$.