Übungsblatt 3

Abgabe: Donnerstag, 1.11.2018 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 3.1

Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen zusammen mit den jeweiligen Verknüpfungen Gruppen sind.

a) $(S(M), \circ)$, die Menge der bijektiven Abbildungen einer beliebigen Menge M auf sich selbst zusammen mit der Komposition (Hintereinanderausführung) von Abbildungen.

b) $(\mathbb{Z}, \cdot)$, die Menge der ganzen Zahlen zusammen mit der üblichen Addition.

c) $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \Delta)$, die nichtnegativen reellen Zahlen mit dem Abstand $x \Delta y := |x - y|$.

Aufgabe 3.2

Betrachten Sie die symmetrische Gruppe S_3 auf $\{1, 2, 3\}$. Eine nützliche Schreibweise für Elemente der S_n ist die *einzeilige Notation*, bei der ein Element $\sigma \in S_n$ als Auflistung der Bilder $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ geschrieben wird.

a) Listen Sie alle Elemente der S_3 explizit auf.

b) Finden Sie 2 Elemente $\sigma, \tau \in S_3$ mit $\tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau$.

c) Finden Sie einen nicht-trivialen Gruppenhomomorphismus $S_3 \to S_3$, d.h. einen, dessen unterliegende Mengenabbildung nicht die Identität ist.

Aufgabe 3.3

Sei G eine Gruppe, in der für jedes Element $g \in G$ gilt $g^2 = e$. Zeigen Sie, dass G eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 3.4

Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind.

a) $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad x \mapsto 2x$

b) $(\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, +), \quad x \mapsto 2x$

c) $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad x \mapsto x^2 + 1$

d) $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +), \quad x \mapsto x + 1$

Aufgabe 3.5

Bestimmen Sie alle Gruppen mit vier Elementen bis auf Isomorphie.