

Übungsblatt 4

Abgabe: Donnerstag, 8.11.2018 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 4.1

Die *Kleinsche Vierergruppe* (benannt nach Felix Klein) besteht aus den vier Elementen $\{e, a, b, ab\}$ wobei e das Neutralelement bezeichnet. In ihr gilt $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$.

- Stellen Sie die Gruppentafel der Kleinschen Vierergruppe auf.
- Finden Sie alle Untergruppen der Kleinschen Vierergruppe.

Aufgabe 4.2

Sei G eine Gruppe und $A \subset G$ eine Teilmenge. Die *von A erzeugte Untergruppe* ist

$$\langle A \rangle := \{a_1 \cdots a_n : n \in \mathbb{N}, a_i \in A \text{ oder } a_i^{-1} \in A\}.$$

Zeigen Sie

- $\langle A \rangle$ ist eine Untergruppe von G .
- Falls $U \subset G$ eine beliebige Untergruppe von G ist, die A enthält, so enthält U auch $\langle A \rangle$.

Damit kann $\langle A \rangle$ als *die kleinste Untergruppe, die A enthält*, bezeichnet werden. Man sagt *A erzeugt G* falls $\langle A \rangle = G$.

- Finden sie eine möglichst kleine Menge $A \subset S_3$ die S_3 erzeugt.

Aufgabe 4.3

Für ein $x \in \mathbb{R}$ sei $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$, d.h. die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Es gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.

- Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R} ist.

Für $x \in \mathbb{R}$, sei $A_x := \{a \in \mathbb{R} : a \sim x\}$ die zugehörige Äquivalenzklasse. Wir definieren eine Addition auf den Äquivalenzklassen von \sim folgendermaßen:

$$A_x + A_y := A_{x+y}$$

- Untersuchen Sie, ob diese Addition wohldefiniert ist.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 4.4

Sei R ein Ring und $x \in R$. Wir bezeichnen mit $\phi_x: R \rightarrow R$, $y \mapsto xy$ die Linksmultiplikationsabbildung.

- a) Wir nennen x eine *Einheit* in R , wenn es ein $y \in R$ mit $xy = 1$ gibt. Zeigen Sie: x ist genau dann eine Einheit in R , wenn ϕ_x surjektiv ist.
- b) Wir nennen x einen *Nullteiler* in R , falls es ein $y \in R \setminus \{0\}$ mit $xy = 0$ gibt. Zeigen Sie: x ist genau dann kein Nullteiler in R , wenn ϕ_x injektiv ist.
- c) Zeigen Sie: Falls R endlich ist, so ist x entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.

Aufgabe 4.5

Sei $E(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ die Menge der multiplikativ invertierbaren Elemente (also Einheiten) des Restklassenringes $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

- a) Zeigen Sie, dass $(E(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist. (Dabei ist \cdot die von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ geerbte Multiplikation für Restklassen modulo m .)
- b) Wieviele Elemente hat die Gruppe $(E(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \cdot)$ für $m = 2, 3, 4, 5, 6$?