

## Übungsblatt 5

Abgabe: Donnerstag, 15.11.2018 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

### Aufgabe 5.1

Sei  $K$  ein Körper der Charakteristik  $p$ . Zeigen Sie, dass  $K$  den Restklassenring  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  als Unterring enthält. Da  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ein Körper ist spricht man auch von einem *Teilkörper* („Unterkörper“ erscheint ungeeignet).

### Aufgabe 5.2

Sei  $K$  ein Körper und  $K[t]$  der Polynomring in einer Unbestimmten.

a) Zeigen Sie, dass auf der Menge  $K[t] \times (K[t] \setminus \{0\})$  durch

$$(g, h) \sim (g', h') \Leftrightarrow gh' = g'h$$

eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

$K(t)$  sei die Menge der Äquivalenzklassen. Die zu  $(g, h)$  gehörige Äquivalenzklasse sei mit  $\frac{g}{h}$  bezeichnet. Somit ist  $\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'} \Leftrightarrow gh' = g'h$ .

b) Zeigen Sie, dass in  $K(t)$  die Verknüpfungen

$$\frac{g}{h} + \frac{g'}{h'} := \frac{gh' + hg'}{hh'}, \quad \frac{g}{h} \cdot \frac{g'}{h'} := \frac{gg'}{hh'}$$

wohldefiniert sind.

c) Zeigen Sie schließlich, dass  $K(t)$  mit diesen Verknüpfungen zu einem Körper wird.

Man nennt  $K(t)$  den *Körper der rationalen Funktionen*.

### Aufgabe 5.3

Seien  $f, g \in \mathbb{Q}[t]$ ,  $f := t^6 + 7t^5 + 15t^4 + 16t^3 + 28t^2 + 28t + 5$ ,  $g := t^2 + 4t + 3$  Polynome mit rationalen Koeffizienten. Bestimmen Sie mittels Polynomdivision die beiden Polynome  $q, r \in \mathbb{Q}[t]$  mit  $f = q \cdot g + r$  und  $\deg(r) < \deg(g)$ .

(Bitte umblättern!)

**Aufgabe 5.4**

Beweisen Sie Lemma 1.3.13 aus der Vorlesung:

Sei  $\lambda \in K$  eine Nullstelle von  $f \in K[t]$ . Dann existiert ein eindeutiges  $g \in K[t]$  mit

a)  $f = (t - \lambda)g$

b)  $\deg(g) = \deg(f) - 1$

*Hinweis:* Verwenden Sie Division mit Rest (Satz 1.3.11).

**Aufgabe 5.5**

Ein Polynom  $f \in K[t]$  heißt *irreduzibel*, falls aus  $f = gh$  für Polynome  $g, h \in K[t]$  folgt, dass  $\deg(g) = 0$  oder  $\deg(h) = 0$ . Anderenfalls heißt es *reduzibel*.

Zeigen Sie, dass jedes Polynom von mindestens Grad 2, welches eine Nullstelle hat, reduzibel ist. Zeigen Sie außerdem, dass die Umkehrung dieser Aussage nicht gilt. Finden Sie also ein reduzibles Polynom, welches keine Nullstelle besitzt.