

## Übungsblatt 8

Abgabe: Donnerstag, 6.12.2018 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

### Aufgabe 8.1

- a) Welche der folgenden Familien sind linear unabhängig / Erzeugendensysteme / Basen?
1.  $((1, 0), (1, 1), (3, 0))$  in  $\mathbb{R}^2$ ,
  2.  $((1, 3), (2, 1))$  in  $\mathbb{R}^2$ ,
  3.  $((1, 3), (2, 1))$  in  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ ,
  4.  $((1, 3))$  in  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ .
- b) Sei  $B = \{(2, 0, 3), (1, 2, 1), (4, 2, 1)\}$ .
1. Zeigen Sie, dass  $B$  eine Basis von  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$  ist.
  2. Ersetzen Sie mit Hilfe des Austauschsatzes zwei Vektoren in  $B$  durch die Vektoren  $(3, 3, 2)$  und  $(1, 1, 3)$ .

### Aufgabe 8.2

Für welche  $t \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$  linear abhängig?

$$(1, 3, 4), \quad (3, t, 11), \quad (-1, -4, 0).$$

### Aufgabe 8.3

- a) Sei  $K$  ein Körper, sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und seien  $v_1, \dots, v_n \in V$ , sodass  $(v_i)_{i \in I}$  linear unabhängig ist für jedes  $I \subset \{1, \dots, n\}$  mit  $|I| = n - 1$ .  
Zeigen Sie: Ist  $(v_1, \dots, v_n)$  linear abhängig, so gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ , sodass  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ .
- b) Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Dann ist  $V$  offensichtlich auch ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Seien  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Zeigen Sie, dass  $(v_1, \dots, v_n)$  genau dann linear unabhängig über  $\mathbb{C}$  ist, wenn  $(v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n)$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$  ist.

(Bitte umblättern!)

**Aufgabe 8.4**

Sei  $K$  ein Körper und  $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$  eine  $n \times n$ -Matrix über  $K$ . Die *Spur* von  $A$  ist die Summe der Diagonalelemente

$$\text{Spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Sei

$$\mathfrak{sl}_2 := \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid \text{Spur}(A) = 0\},$$

der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der komplexen  $2 \times 2$  Matrizen mit Spur 0. Überprüfen Sie kurz (ohne Abgabe), dass  $\mathfrak{sl}_2$  ein Vektorraum ist.

**Aufgabe:** Finden Sie eine Basis für  $\mathfrak{sl}_2$ .

*Hinweis:* Fassen Sie zunächst  $\mathfrak{sl}_2$  als Untervektorraum eines bekannten Vektorraums auf. Welche Anzahlen von Basisvektoren sind möglich? Wie viele vermuten Sie für  $\mathfrak{sl}_2$ ? Finden Sie genügend viele linear unabhängige Elemente von  $\mathfrak{sl}_2$ .

**Aufgabe 8.5**

Man könnte versuchen lineare Algebra statt über Körpern auch über Ringen zu betreiben. Der einfachste Ring ist  $\mathbb{Z}$  und  $\text{span}_{\mathbb{Z}}$  kann analog zu  $\text{span}_K$  für einen Körper  $K$  definiert werden. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z} = \text{span}_{\mathbb{Z}}(2, 3) = \text{span}_{\mathbb{Z}}(1).$$

Erklären Sie kurz den fundamentalen Unterschied zur linearen Algebra über Körpern und begründen Sie, warum dieser Effekt eintritt.