

Übungsblatt 9

Abgabe: Donnerstag, 13.12.2018 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 9.1

Gegeben seien im \mathbb{R}^5 die Vektoren $v_1 = (4, 1, 1, 0, -2)$, $v_2 = (0, 1, 4, -1, 2)$, $v_3 = (4, 3, 9, -2, 2)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $v_5 = (0, -2, -8, 2, -4)$.

- Bestimmen Sie eine Basis von $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.
- Wählen Sie alle möglichen Basen von V aus den Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 aus, und kombinieren Sie jeweils v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 daraus linear.

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie für die folgenden Vektorräume jeweils eine Basis und weisen Sie die Basiseigenschaften nach.

- $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\}$,
- $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,
- $\text{span}(t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5) \subset \mathbb{R}[t]$,
- $\{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 9.3

Sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie, dass

$$\dim V = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt eine Kette } V_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_n \text{ von Untervektorräumen } V_i \subseteq V\}$$

Hier bezeichnet \sup die kleinste obere Schranke der Menge (∞ falls die Menge unbeschränkt ist).

Aufgabe 9.4

Wie viele Elemente hat ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper?

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 9.5

Sei V ein Vektorraum und seien W_1, \dots, W_n Untervektorräume von V , sodass $V = W_1 + \dots + W_n$.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Sind $w_i \in W_i$ für $i = 1, \dots, n$ mit $w_1 + \dots + w_n = 0$, so ist $w_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. Für jedes $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $w_i \in W_i$, $i = 1, \dots, n$ mit $v = w_1 + \dots + w_n$.
3. Es gilt $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_n) = \{0\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

b) Zeigen Sie, dass für $n > 2$ die Bedingungen aus a) im Allgemeinen nicht äquivalent sind zu $W_1 \cap \dots \cap W_n = \{0\}$.