Übungsblatt 1

Abgabe: Donnerstag, 18.10.2018 vor der Vorlesung.
Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 1.1 (2 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für die Operationen mit Mengen:

a) $A \cap B = B \cap A$,
b) $A \cup B = B \cup A$,
c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
g) $A \setminus (M_1 \cap M_2) = (A \setminus M_1) \cup (A \setminus M_2)$,
h) $A \setminus (M_1 \cup M_2) = (A \setminus M_1) \cap (A \setminus M_2)$.

Aufgabe 1.2
Seien A, B Mengen. Dann ist das Kartesische Produkt oder Mengenprodukt definiert als $A \times B := \{(a, b) : a \in A; b \in B\}$, die Menge der geordneten Paare. Beweisen oder widerlegen Sie: zu jeder Teilmenge $C \subseteq A \times B$ existieren Teilmengen $A_1 \subseteq A$ und $B_1 \subseteq B$, sodass $C = A_1 \times B_1$.

Aufgabe 1.3
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - y$,
b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$,
c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 3y, y - 2x)$

Aufgabe 1.4
Ein Konferenzhotel für Mathematiker hat genau $\mathbb{N}$ (d. h. unendlich viele mit natürlichen Zahlen nummerierte) Betten. Das Hotel ist bereits voll belegt, aber die Mathematiker lassen sich nach Belieben innerhalb des Hotels umquartieren. Das Hotel soll aus wirtschaftlichen Gründen stets voll belegt sein, und wenn möglich, sollen alle neu ankommenden Gäste untergebracht werden. Was macht man in folgenden Fällen?

a) Ein weiterer Mathematiker trifft ein.
b) Die Insassen eines Kleinbusses mit n Plätzen suchen Unterkunft.
c) Ein Großraumbus mit $\mathbb{N}$ Personen kommt an.
d) n Großraumbusse treffen ein.
e) $\mathbb{N}$ Großraumbusse fahren vor.

Hinweis: Lesen Sie sich zunächst den Wikipedia Artikel “Cantors erstes Diagonalargument” durch. Das hilft für die letzte Teilaufgabe.