Übungsblatt 12

Abgabe: Donnerstag, 17.01.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 12.1

Es seien Metall-Legierungen M_1, M_2 und M_3 gegeben, die alle Kupfer, Silber und Gold enthalten, und zwar in folgenden Prozentsätzen:

	Kupfer	Silber	Gold
M_1	20	60	20
M_2	70	10	20
M_3	50	50	0

Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40 % Kupfer, 50 % Silber und 10 % Gold enthält?

Aufgabe 12.2

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme darauf, ob sie eindeutig lösbar sind:

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad Bx = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

b) Untersuchen Sie, ob die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Bx = b$ für beliebige $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar sind.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 12.3

Es sei K ein Körper und $N = (n_{ij}) \in K^{n\times n}$, deren Einträge auf der oberen Nebendiagonalen 1 sind und alle anderen Einträge 0, d.h.

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i+1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $i, j = 1, \ldots, n$.

Zeigen Sie, dass für $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Einträge der Matrix $N^k = (n_{ij}^{(k)})$ auf der k-ten oberen Nebendiagonale 1 sind und alle anderen Einträge 0, d.h.

$$n_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i+k, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $i, j = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 12.4

Für $d \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{Q}[x]_{\leq d}$ den Vektorraum der Polynome mit rationalen Koeffizienten vom Grad höchstens d. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} \int : \mathbb{Q}[x]_{\leq 2} &\to \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}, \\ ax^2 + bx + c &\mapsto \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\int$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen ist.

b) Bestimmen Sie bezüglich der Basen $\mathcal{A} = (1, x, x^2)$ von $\mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$ und $\mathcal{B} = (1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3)$ die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\int)$ von $\int$.

c) Berechnen Sie $\int(p)$ für $p = 2x^2 + 3x + 7$ mit Hilfe der darstellenden Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\int)$. Stellen Sie das Ergebnis außerdem bezüglich der Basis $(1, x, x^2, x^3)$ von $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ dar.

Aufgabe 12.5

Zeigen Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraumes, dass für Vektorräume V, W sowie einen Untervektorraum $U \subseteq V$ die lineare Abbildug

$$\begin{aligned} \{F \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid F|_U = 0\} &\to \operatorname{Hom}(V/U, W) \\ F &\mapsto \bar{F} \end{aligned}$$

(vgl. Satz 2.2.13) ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.