Übungsblatt 2

Abgabe: Donnerstag, 25.10.2018 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 2.1

Seien M, N endliche Mengen. Wie viele Abbildungen $f : M \to N$ gibt es? Wie viele davon sind injektiv? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 2.2

Beweisen Sie Punkte 2 und 3 von Lemma 1.1.5: Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) f ist surjektiv, genau dann wenn ein $g : Y \to X$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

b) f ist bijektiv, genau dann wenn ein $g : Y \to X$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. In diesem Fall stimmt g mit der Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ überein.

Aufgabe 2.3

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Wenn $g \circ f : X \to Z$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.

b) Wenn $g \circ f : X \to Z$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

Die Umkehrung einer Implikation $A \Rightarrow B$ ist die Implikation $B \Rightarrow A$. Zeigen Sie, dass die Umkehrungen der obigen Implikationen nicht richtig sind (d.h. nicht für beliebige f, g gelten).

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 2.4

Überprüfen Sie die folgenden Relationen auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen?

a) Ein Schauspieler steht in Besetzungsrelation zu einem anderen, wenn es einen Film gibt in dem beide mitgespielt haben.

b) Seien $x, y \in \mathbb{N}$, $x, y \neq 0$. Es gelte $x \sim y$ genau dann, wenn xy eine Quadratzahl ist (d. h. $xy = m^2$ für ein $m \in \mathbb{Z}$).

c) Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Es gelte $x \sim y$ genau dann, wenn x und y gerade sind.

Aufgabe 2.5

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Zeigen Sie, dass dann eine Menge Y und eine Abbildung $f : X \to Y$ existieren, so dass sich die Relation für $x_1, x_2 \in X$ schreiben lässt als $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.