Klausur

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und ihre Matrikelnummer

Name: MatNr.:

Punkte:

Aufgabe	1	2	3	4	5
von	12	12	12	12	12

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Sie brauchen hier keine Begründung ihrer Antwort angeben. Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, jede falsche Antwort einen Minuspunkt.

1. Es gibt eine Gruppe mit 4 Elementen.
2. Es gibt einen Körper mit 4 Elementen.
3. Es gibt einen Vektorraum mit 4 Elementen.
4. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
5. $(\neg B \wedge A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
6. Die Teilbarkeit $a \sim b \Leftrightarrow a|b$ ist eine Äquivalenzrelation auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.
7. Wenn ein Isomorphismus $F : V \to W$ zwischen Vektorräumen V, W existiert, so gilt $\dim V = \dim W$.
8. Wenn $\dim V = \dim W$ gilt, so existiert ein Isomorphismus $F : V \to W$.
9. Die Vektoren 1, $i + 1$ und i sind im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ linear unabhängig.
10. Jede Teilmenge einer Menge linear abhängiger Vektoren ist linear abhängig.

Aufgabe 2

Beantworten Sie folgende Fragen knapp:

1. Wie lautet die Dimensionsformel für lineare Abbildungen $F : V \to W$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen V, W?

2. Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren in einem K-Vektorraum. Was ist die logische Negation der Aussage $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K,\ 0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$?

3. Was ist die Dimension von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum?

4. Sei $K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen und

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(3 \times 1, K), \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(1 \times 3, K)$$

Berechnen Sie die Matrixprodukte AB sowie $A^T B^T$.

Aufgabe 3

Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und W_1, W_2 Untervektorräume von V mit $V = W_1 \oplus W_2$. Ferner sei $F : W_1 \to V$ eine lineare Abbildung mit $\operatorname{rang}(F) = \dim W_1$. Beweisen Sie, dass ein Automorphismus $\overline{F} : V \to V$ existiert der F erweitert, d.h. für den gilt $\overline{F}|_{W_1} = F$.

Aufgabe 4

Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $B = \{1, x, \cos, \sin\}$ (als Untervektorraum von $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Betrachten Sie den Endomorphismus $F : V \to V$ der f auf seine Ableitung f' abbildet.

1. Ist F ein Automorphismus?

2. Geben Sie eine Matrixdarstellung von F in der Basis B an.

3. Bestimmen Sie den Kern von F.

Aufgabe 5

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$$

Bestimmen Sie Basen von $\ker A$ und $\operatorname{Im} A$ sowie den Rang von A.