

Übungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 1.11.2019, 12:00 Uhr (blauer Briefkasten vor 03-222).

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgaben 1, 2 und 3 sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 2.1

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

- Wenn $g \circ f : X \rightarrow Z$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.
- Wenn $g \circ f : X \rightarrow Z$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

Die Umkehrung einer Implikation $A \Rightarrow B$ ist die Implikation $B \Rightarrow A$. Zeigen Sie, dass die Umkehrungen der obigen Implikationen nicht richtig sind (d.h. nicht für beliebige f, g gelten).

Aufgabe 2.2

Überprüfen Sie die folgenden Relationen auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen?

- Ein Schauspieler steht in Besetzungsrelation zu einem anderen, wenn es einen Film gibt, in dem beide mitgespielt haben.
- Seien $x, y \in \mathbb{N}$, $x, y \neq 0$. Es gelte $x \sim y$ genau dann, wenn xy eine Quadratzahl ist (d. h. $xy = m^2$ für ein $m \in \mathbb{Z}$).
- Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Es gelte $x \sim y$ genau dann, wenn x und y gerade sind.

Aufgabe 2.3

Überprüfen Sie, ob die folgenden Angaben Gruppen beschreiben.

- $(4\mathbb{Z}, +)$, wobei $4\mathbb{Z} = \{4z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ und $+$ die Einschränkung der üblichen Addition von \mathbb{Z} auf $4\mathbb{Z}$ ist.
- $(4\mathbb{Z}, \cdot)$, wobei \cdot die Einschränkung der üblichen Multiplikation ist.
- $(4\mathbb{Z}, *)$ mit $a * b := a + b + 13$.
- $(4\mathbb{Z}, *)$ mit $a * b := a + b + 12$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 2.4

Seien X und Y nichtleere Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie Punkte (ii) und (iii) von Lemma 1.1.7:

- a) f ist surjektiv, genau dann wenn ein $g : Y \rightarrow X$ existiert mit $f \circ g = \text{id}_Y$.
- b) f ist bijektiv, genau dann wenn ein $g : Y \rightarrow X$ existiert mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$. In diesem Fall stimmt g mit der Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ überein.

Aufgabe 2.5

Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X . Zeigen Sie, dass dann eine Menge Y und eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ existieren, sodass sich die Relation für $x_1, x_2 \in X$ schreiben lässt als $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.