Übungsblatt 3

Abgabe: Donnerstag, 7.11.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgaben 1, 2 und 3 sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 3.1

Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind.

a) $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad x \mapsto 2x$

b) $(\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, +), \quad x \mapsto 2x$

c) $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad x \mapsto x^2 + 1$

d) $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +), \quad x \mapsto x + 1$

Aufgabe 3.2

Überprüfen Sie, ob folgende Teilmengen G' Untergruppen der jeweiligen Gruppen G sind.

a) $G = S_4$ und $G' = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma^2 = \mathrm{id}\}$.

b) $G = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $G' = \{(a, b) \in G \mid b = 2^a\}$.

Hinweis: Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ zwei Gruppen. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass das *Produkt* $(G, \cdot) \times (H, \circ)$, d.h. die Menge $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$(G \times H) \times (G \times H) \to G \times H, \quad ((g, h), (g', h')) \mapsto (g \cdot g', h \circ h'),$$

eine Gruppe ist.

c) $(G, \circ)$ eine beliebige Gruppe, H eine Untergruppe von G, $g \in G$ und $G' = gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$.

Aufgabe 3.3

Sei G eine Gruppe, sodass $g^2 = e$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 3.4

Sei G eine Gruppe und sei G' eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass G' (mit der von G geerbten Verknüpfung) eine Gruppe ist.

Aufgabe 3.5

Bestimmen Sie alle Gruppen mit vier Elementen bis auf Isomorphie.