

## Übungsblatt 4

Abgabe: Donnerstag, 14.11.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgaben 1, 2 und 3 sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

### Aufgabe 4.1

Sei  $G$  eine Gruppe und sei  $G'$  eine nichtleere Teilmenge von  $G$ . Zeigen Sie:

- $G'$  ist genau dann eine Untergruppe von  $G$ , wenn  $ab^{-1} \in G'$  für alle  $a, b \in G'$ .
- Falls  $G'$  endlich ist, so ist  $G'$  genau dann eine Untergruppe von  $G$ , wenn  $ab \in G'$  für alle  $a, b \in G'$ .

### Aufgabe 4.2

Für ein  $x \in \mathbb{R}$  sei  $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ , d.h. die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich  $x$  ist. Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Es gelte  $x \sim y$  genau dann, wenn  $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ .

- Zeigen Sie, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}$  ist.

Für  $x \in \mathbb{R}$ , sei  $A_x := \{a \in \mathbb{R} : a \sim x\}$  die zugehörige Äquivalenzklasse. Wir definieren eine Addition auf den Äquivalenzklassen von  $\sim$  folgendermaßen:

$$A_x + A_y := A_{x+y}$$

- Untersuchen Sie, ob diese Addition wohldefiniert ist.

### Aufgabe 4.3

Sei  $E(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  die Menge der multiplikativ invertierbaren Elemente (also Einheiten, siehe Aufgabe 4.5a)) des Restklassenringes  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .

- Zeigen Sie, dass  $(E(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \cdot)$  eine abelsche Gruppe ist. (Dabei ist  $\cdot$  die von  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  geerbte Multiplikation für Restklassen modulo  $m$ .)
- Wieviele Elemente hat die Gruppe  $(E(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \cdot)$  für  $m = 2, 3, 4, 5, 6$ ?

(Bitte umblättern!)

**Aufgabe 4.4**

Sei  $G$  eine Gruppe und  $A \subset G$  eine Teilmenge. Die *von  $A$  erzeugte Untergruppe* ist

$$\langle A \rangle := \{a_1 \cdots a_n : n \in \mathbb{N}, a_i \in A \text{ oder } a_i^{-1} \in A\}.$$

Zeigen Sie

- $\langle A \rangle$  ist eine Untergruppe von  $G$ .
- Falls  $U \subset G$  eine beliebige Untergruppe von  $G$  ist, die  $A$  enthält, so enthält  $U$  auch  $\langle A \rangle$ .

Damit kann  $\langle A \rangle$  als *die kleinste Untergruppe, die  $A$  enthält*, bezeichnet werden. Man sagt  $A$  *erzeugt*  $G$ , falls  $\langle A \rangle = G$ .

- Finden sie eine möglichst kleine Menge  $A \subset S_3$  die  $S_3$  erzeugt.

**Aufgabe 4.5**

Sei  $R$  ein Ring (mit Eins) und sei  $x \in R$ . Wir bezeichnen mit  $\lambda_x: R \rightarrow R$ ,  $y \mapsto xy$ , die Linksmultiplikationsabbildung und mit  $\rho_x: R \rightarrow R$ ,  $y \mapsto yx$ , die Rechtsmultiplikationsabbildung.

- Wir nennen  $x$  eine *Einheit* in  $R$ , wenn es ein  $y \in R$  mit  $xy = yx = 1$  gibt. Zeigen Sie, dass  $x$  ist genau dann eine Einheit in  $R$  ist, wenn  $\lambda_x$  und  $\rho_x$  surjektiv sind.
- Sei  $R$  nun kommutativ. Wir nennen  $x$  einen *Nullteiler* in  $R$ , falls es ein  $y \in R \setminus \{0\}$  mit  $xy = 0$  gibt. Zeigen Sie, dass  $x$  ist genau dann kein Nullteiler in  $R$  ist, wenn  $\lambda_x$  injektiv ist.
- Sei  $R$  nun ein endlicher kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass  $x$  entweder eine Einheit oder ein Nullteiler ist.