

Übungsblatt 5

Abgabe: Donnerstag, 21.11.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgaben 1, 2 und 3 sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 5.1

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen, jeweils zusammen mit den gegebenen Verknüpfungen einen Ring oder sogar einen Körper bilden.

a) $(\{0, 1, a, a+1\}, \oplus, \odot)$ mit den Verknüpfungstabellen

\oplus	0	1	a	a+1
0	0	1	a	a+1
1	1	0	a+1	a
a	a	a+1	0	1
a+1	a+1	a	1	0

und

\odot	0	1	a	a+1
0	0	0	0	0
1	0	1	a	a+1
a	0	a	a+1	1
a+1	0	a+1	1	a

Welche der Ihnen bekannten Gruppen auf 4 Elementen ist $(\{0, 1, a, a+1\}, \oplus)$?

b) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$, wobei die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

mit der induzierten Addition und Multiplikation von reellen Zahlen versehen wird, d.h. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ usw.

Aufgabe 5.2

Seien $f, g \in \mathbb{Q}[t]$, $f := t^6 + 7t^5 + 15t^4 + 16t^3 + 28t^2 + 28t + 5$, $g := t^2 + 4t + 3$ Polynome mit rationalen Koeffizienten. Bestimmen Sie mittels Polynomdivision die beiden Polynome $q, r \in \mathbb{Q}[t]$ mit $f = q \cdot g + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$.

Aufgabe 5.3

Zeigen Sie, dass es einen unendlichen Körper mit endlicher Charakteristik gibt.

Hinweis: Betrachten Sie den Körper der rationalen Funktionen über einem geeigneten Körper (siehe Aufgabe 5).

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 5.4

Ein Polynom $f \in K[t]$ heißt *irreduzibel*, falls aus $f = gh$ für Polynome $g, h \in K[t]$ folgt, dass $\deg(g) = 0$ oder $\deg(h) = 0$. Anderenfalls heißt es *reduzibel*.

Zeigen Sie, dass jedes Polynom von mindestens Grad 2, welches eine Nullstelle hat, reduzibel ist. Zeigen Sie außerdem, dass die Umkehrung dieser Aussage nicht gilt. Finden Sie also ein reduzibles Polynom, welches keine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 5.5

Sei K ein Körper und $K[t]$ der Polynomring in einer Unbestimmten.

- a) Zeigen Sie, dass auf der Menge $K[t] \times (K[t] \setminus \{0\})$ durch

$$(g, h) \sim (g', h') \Leftrightarrow gh' = g'h$$

eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

$K(t)$ sei die Menge der Äquivalenzklassen. Die zu (g, h) gehörige Äquivalenzklasse sei mit $\frac{g}{h}$ bezeichnet. Somit ist $\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'}$ genau dann, wenn $gh' = g'h$.

- b) Zeigen Sie, dass in $K(t)$ die Verknüpfungen

$$\frac{g}{h} + \frac{g'}{h'} := \frac{gh' + hg'}{hh'}, \quad \frac{g}{h} \cdot \frac{g'}{h'} := \frac{gg'}{hh'}$$

wohldefiniert sind.

- c) Zeigen Sie schließlich, dass $K(t)$ mit diesen Verknüpfungen zu einem Körper wird.

Man nennt $K(t)$ den *Körper der rationalen Funktionen*.