

Übungsblatt 6

Abgabe: Donnerstag, 28.11.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgaben 1, 2 und 3 sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 6.1

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

- a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 2x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
- b) $\{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
- c) $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
- d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq x_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
- e) $\{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- f) $\{A \in K^{m \times n} \mid A \text{ ist in Zeilenstufenform}\} \subseteq K^{m \times n}$.

Aufgabe 6.2

Sei K ein Körper und seien V und W zwei K -Vektorräume. Zeigen Sie, dass das direkte Produkt $V \times W$ durch die Verknüpfungen

$$(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w'), \quad \lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w),$$

für $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $\lambda \in K$ ebenfalls zu einem K -Vektorraum wird.

Aufgabe 6.3

Sei K ein Körper. Auf $K^{2 \times 2}$, der Menge der 2×2 -Matrizen über K , sei die elementweise Addition

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

sowie folgende Multiplikation gegeben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Prüfen Sie, ob $K^{2 \times 2}$ ein Ring ist. Falls ja, prüfen Sie, ob er kommutativ ist, ob er ein Einselement besitzt und ob er ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 6.4

Sei R ein Ring mit Eins und sei $x \in R$.

- Zeigen Sie: Ist x^m eine Einheit für ein $m > 0$, so ist auch x eine Einheit.
- Zeigen Sie, dass $1 - x^m = (1 - x)(\sum_{i=0}^{m-1} x^i) = (\sum_{i=0}^{m-1} x^i)(1 - x)$.
- $x \in R$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x^m = 0$. Zeigen Sie: Ist x nilpotent, so sind $1 - x$ und $1 + x$ Einheiten.

Aufgabe 6.5

Sei $K = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Betrachte den Vektorraum $V = K^3$ und darin die Teilmengen

$$E_0 := \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 + x_2 + x_3 = \bar{0}\},$$

$$E_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 + x_2 + x_3 = \bar{1}\}.$$

- Wie viele Elemente haben die Mengen?
- Welche dieser Mengen sind Untervektorräume von V ?
- Bonus*: Welcher Zusammenhang besteht zwischen E_0 und E_1 ?