

Übungsblatt 7

Abgabe: Donnerstag, 5.12.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgaben 1, 2 und 3 sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 7.1

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$:

a)

$$\begin{aligned}x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}-6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\-9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\-3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\-7x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 7x_4 &= 6\end{aligned}$$

Aufgabe 7.2

Bestimmen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem mit folgender erweiterter Koeffizientenmatrix lösbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Lösung an.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array} \right)$$

Aufgabe 7.3

Sei $V = K^{2 \times 2}$ der Vektorraum der (2×2) -Matrizen über einem Körper K . Finden Sie eine möglichst kleine Menge $M \subset V$ mit $\text{span}_K(M) = V$. Können Sie beweisen, dass es keine kleinere Menge als Ihre geben kann?

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 7.4

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem auf einem Taschenrechner mit einer Rechengenauigkeit von 8 Stellen hinter dem Komma (Abschneiden weiterer Stellen ohne Rundung!) für $\varepsilon = 10^{-k}$ für größer werdendes $k \leq 8$, und zwar einmal mit dem Pivot ε und einmal mit dem „maximalen Zeilenpivot“ 1 der ersten Spalte.

$$\begin{aligned}x + y &= 2, \\ \varepsilon x + y &= 1.\end{aligned}$$

Erklären Sie die beobachteten Effekte.

Aufgabe 7.5

Eine *Gerade* in \mathbb{R}^3 ist die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$, dessen Koeffizientenmatrix Rang 2 hat, d.h. zwei nichtverschwindende Zeilen in Zeilenstufenform. Bestimmen Sie eine Gerade in \mathbb{R}^3 , die durch die Punkte $(1, 0, 1)$ und $(2, 1, 2)$ geht. Finden Sie also A und b wie oben, sodass $(1, 0, 1), (2, 1, 2) \in \text{Lös}(A, b)$.