Übungsblatt 8

Abgabe: Donnerstag, 12.12.2019 vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgaben 4 und 5 sind zur Korrektur einzureichen.

Aufgabe 8.1

a) Welche der folgenden Familien sind linear unabhängig / Erzeugendensysteme / Basen?
   1. $((1,0),(1,1),(3,0))$ in $\mathbb{R}^2$,
   2. $((1,3),(2,1))$ in $\mathbb{R}^2$,
   3. $((1,3),(2,1))$ in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$,
   4. $((1,3))$ in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$.

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$(1,3,4), \quad (3,t,11), \quad (-1,-4,0).$$

Aufgabe 8.2

Sei K ein Körper und $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Die *Spur* von A ist die Summe der Diagonalelemente

$$\operatorname{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Sei

$$\mathfrak{sl}_2 := \left\{ A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid \operatorname{Spur}(A) = 0 \right\},$$

der $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen 2×2 Matrizen mit Spur 0. Überprüfen Sie kurz, dass $\mathfrak{sl}_2$ ein Vektorraum ist.

Aufgabe: Finden Sie eine Basis für $\mathfrak{sl}_2$.
Hinweis: Fassen Sie zunächst $\mathfrak{sl}_2$ als Untervektorraum eines bekannten Vektorraums auf. Welche Anzahlen von Basisvektoren sind möglich? Wie viele vermuten Sie für $\mathfrak{sl}_2$? Finden Sie genügend viele linear unabhängige Elemente von $\mathfrak{sl}_2$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 8.3

a) Sei V ein Vektorraum, sei U ein Untervektorraum von V und seien $x \in U \setminus \{0\}$ und $y \in V \setminus U$. Zeigen Sie, dass (x, y) linear unabhängig ist.

b) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Dann ist V offensichtlich auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ genau dann linear unabhängig über $\mathbb{C}$ ist, wenn $(v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n)$ linear unabängig über $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 8.4

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$, sodass $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig ist, aber $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig für jedes $I \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $|I| = n-1$.

a) Zeigen Sie, dass es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ gibt, sodass $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$.

b) Seien nun $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ mit $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = 0$. Zeigen Sie, dass es dann ein $\nu \in K$ gibt, sodass $\mu_i = \nu \cdot \lambda_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 8.5

Man könnte versuchen lineare Algebra statt über Körpern auch über Ringen zu betreiben. Der einfachste Ring ist $\mathbb{Z}$ und $\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}$ kann analog zu span_K für einen Körper K definiert werden. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z} = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(2, 3) = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(1).$$

Erklären Sie kurz den fundamentalen Unterschied zur linearen Algebra über Körpern und begründen Sie, warum dieser Effekt eintritt.