Übungsblatt 9

Abgabe: Donnerstag, 19.12.2019 vor der Vorlesung.
Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.
Aufgaben 4 und 5 sind zur Korrektur einzureichen.

Aufgabe 9.1

Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren $v_1 = (4, 1, 1, 0, -2)$, $v_2 = (0, 1, 4, -1, 2)$, $v_3 = (4, 3, 9, -2, 2)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $v_5 = (0, -2, -8, 2, -4)$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $V = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

b) Wählen Sie alle möglichen Basen von V aus den Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 aus, und kombinieren Sie jeweils v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 daraus linear.

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie für die folgenden Vektorräume jeweils eine Basis und weisen Sie die Basiseigenschaften nach.

a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\}$,

b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,

c) $\operatorname{span}(t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5) \subset \mathbb{R}[t]$,

d) $\{f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 9.3

Sei K ein Körper und seien U und V Untervektorräume von K^n bzw. K^m. Zeigen Sie, dass

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : u \in U,\ v \in V \right\}$$

ein Untervektorraum von K^{m+n} ist. Zeigen Sie außerdem, dass $\dim W = \dim U + \dim V$.

Aufgabe 9.4

a) Wie viele Elemente hat ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper?

b) Sei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Wie viele Ergänzungen von $(\overline{1}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{0}, \overline{1})$ zu einer Basis von K^3 gibt es?

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 9.5

Sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie, dass

$$\dim V = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt eine Kette } V_0 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n \text{ von Untervektorräumen } V_i \subseteq V\}.$$

Hier bezeichnet sup die kleinste obere Schranke der Menge (∞ falls die Menge unbeschränkt ist).