Übungsblatt 10

Abgabe: Donnerstag, 09.01.2020 vor der Vorlesung.

Bitte bearbeiten Sie alle Aufgaben vor dem Übungstermin und reichen Sie bitte Aufgaben 4 und 5 schriftlich ein. Verwenden Sie bitte ein Blatt je Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Weihnachtsbonusaufgabe (2 Bonuspunkte): Protokollieren Sie Ihr Vorgehen zu Aufgabe 10.1 in einem „Lerntagebuch". Führen Sie in diesem alle Gedanken und inneren Monologe/Dialoge auf, die Sie zur Bearbeitung der Aufgabe haben. Seien Sie ehrlich, aber erzählen Sie keine Sachen, die nicht für die Aufgabe relevant sind. Sie könnten so beginnen:

Donnerstag: Ich lese die Aufgabe – nicht klar was eine lineare Abbildung ist – vielleicht googeln? Aber erstmal TikTok checken...

Freitag: Skript lesen: Definition lineare Abbildung gefunden. . .

Der Sinn der Übung ist, dass die Lehrenden den Verstehensprozess der Lernenden besser kennenlernen. Vielleicht hilft es Ihnen auch, ihre Vorgehensweisen zu reflektieren.

Nutzen Sie die Weihnachtspause bitte auch für Wiederholung. Schauen Sie sich ihr Skript nochmal an. Könnten Sie die Übungsaufgaben von Blatt 1-7 jetzt problemlos lösen? Könnten Sie einfache Argumente aus der Vorlesung ohne weitere Hilfsmittel selbst an der Tafel erklären?

Aufgabe 10.1

Seien $W_1, \dots, W_k \subseteq V$ Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ genau dann, wenn $V = W_1 + \cdots + W_k$ und für alle $i = 1, \dots, k$ gilt $W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j = \{0\}$.

Aufgabe 10.2

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, falls $A^T = A$.

a) Zeigen Sie, dass die symmetrischen Matrizen einen Untervektorraum $\mathrm{Sym}(n; K)$ von $K^{n\times n}$ bilden. Geben Sie die Dimension und eine Basis von $\mathrm{Sym}(n; K)$ an.

Ist $\operatorname{char} K \neq 2$, so heißt $A \in K^{n\times n}$ *schiefsymmetrisch* (oder *alternierend*), falls $A^T = -A$. Im Folgenden sei stets $\operatorname{char} K \neq 2$.

b) Zeigen Sie, dass die alternierenden Matrizen einen Untervektorraum $\mathrm{Alt}(n; K)$ von $K^{n\times n}$ bilden. Bestimmen Sie auch für $\mathrm{Alt}(n; K)$ die Dimension und eine Basis.

c) Für $A \in K^{n\times n}$ sei $A_s := \frac{1}{2}(A + A^T)$ und $A_a := \frac{1}{2}(A - A^T)$. Zeigen Sie: A_s ist symmetrisch, A_a ist alternierend, und es gilt $A = A_s + A_a$.

d) Zeigen Sie: $K^{n\times n} = \mathrm{Sym}(n; K) \oplus \mathrm{Alt}(n; K)$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 10.3

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (3x + 2y, x)$, b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b \ (a, b \in \mathbb{R})$,

c) $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + \sqrt{2}y$ (über $\mathbb{Q}$), d) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z}$,

e) $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(1)$, f) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z}$ (über $\mathbb{R}$).

Aufgabe 10.4

Für einen Endomorphismus $F \colon V \to V$ ist die Menge der *Fixpunkte* von F definiert durch $\mathrm{Fix}\, F := \{v \in V \mid F(v) = v\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Fix}\, F$ ein Untervektorraum von V ist.

b) Sei der Endomorphismus F gegeben durch

i) $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x$,

ii) $F \colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t], \quad P \mapsto P'$,

iii) $F \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f'$.

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\mathrm{Fix}\, F$. Hierbei bezeichnet P' bzw. f' jeweils die Ableitung und $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der unendlich oft stetig differenzierbaren Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 10.5

Sei $F \colon V \to V$ ein Endomorphismus des Vektorraums V und $v \in V$, so dass für eine natürliche Zahl n gilt:

$$F^n(v) \neq 0 \quad \text{und} \quad F^{n+1}(v) = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann $v, F(v), \ldots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.