Übungsblatt 11

Abgabe: Donnerstag, 16.01.2020 vor der Vorlesung.

Bitte bearbeiten Sie alle Aufgaben vor dem Übungstermin und reichen Sie bitte Aufgaben 4 und 5 schriftlich ein. Verwenden Sie bitte ein Blatt je Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 11.1

Sei V ein Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Der Endomorphismus f heißt *Projektion*, falls $f^2 = f$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) f ist eine Projektion.

b) $\mathrm{id}_V - f$ ist eine Projektion.

c) $\ker(f) = \mathrm{im}(\mathrm{id}_V - f)$.

d) $\mathrm{im}(f) = \ker(\mathrm{id}_V - f)$.

Aufgabe 11.2

Seien zwei Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils Basen von $\ker F$ und $\mathrm{im}\, F$.

Aufgabe 11.3

Bestimmen Sie alle $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, die das Quadrat $Q := [-1, 1]^2$ auf sich selbst abbilden, d.h. für die gilt $F(Q) = Q$. Welche algebraische Struktur hat die Menge dieser Abbildungen?

Hinweis: Sie könnten alle solchen linearen Abbildungen auflisten, aber effizienter ist es, die Ringstruktur von $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ zu nutzen.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 11.4

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \to V$ eine Projektion (siehe Aufgabe 11.1).

a) Zeigen Sie, dass $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

b) Sei $g\colon V \to V$ eine weitere Projektion. Zeigen Sie: Wenn $\operatorname{im} f \subset \ker g$ und $\operatorname{im} g \subset \ker f$, dann ist auch $f + g$ eine Projektion. Unter welcher Voraussetzung an K gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 11.5

Sei K ein Körper, seien V und W K-Vektorräume, sei $f\colon V \to W$ eine K-lineare Abbildung und sei B eine Basis von V. Zeigen Sie:

a) f ist genau dann surjektiv, wenn $f(B)$ ein Erzeugendensystem für W ist.

b) f ist genau dann injektiv, wenn $f(B)$ linear unabhängig ist.

c) f ist genau dann bijektiv, wenn $f(B)$ eine Basis von W ist.