Übungsblatt 12

Abgabe: Donnerstag, 23.01.2020 vor der Vorlesung.

Bitte bearbeiten Sie alle Aufgaben vor dem Übungstermin und reichen Sie bitte Aufgaben 4 und 5 schriftlich ein. Verwenden Sie bitte ein Blatt je Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 12.1

a) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Weiter sei $W_0 := V$ und $W_{i+1} := F(W_i)$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es dann ein $m \in \mathbb{N}$ mit $W_{m+i} = W_m$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gibt.

b) Gilt diese Aussage auch für unendlichdimensionale Vektorräume?

Aufgabe 12.2

Sei K ein Körper, seien V und W zwei K-Vektorräume, sei U ein Untervektorraum von V und U' ein Untervektorraum von W und sei $f\colon V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Unter welchen Voraussetzungen wird durch

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon V/U &\to W/U', \\ \overline{x} &\mapsto \overline{f(x)}, \end{aligned}$$

eine K-lineare Abbildung definiert?

Aufgabe 12.3

Es seien Metall-Legierungen M_1, M_2 und M_3 gegeben, die alle Kupfer, Silber und Gold enthalten, und zwar in folgenden Prozentsätzen:

	Kupfer	Silber	Gold
M_1	20	60	20
M_2	70	10	20
M_3	50	50	0

Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40 % Kupfer, 50 % Silber und 10 % Gold enthält?

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 12.4

Zeigen sie, dass jede lineare Abbildung $K^n \to K^m$ von der Form $x \mapsto Ax$ für eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist.
Hinweis: Wenden Sie die Abbildung auf eine geeignete Basis an.

Aufgabe 12.5

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme darauf, ob sie eindeutig lösbar sind:

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad Bx = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

b) Untersuchen Sie, ob die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Bx = b$ für beliebige $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar sind.