

## Übungsblatt 13

Keine Abgabe.

### Aufgabe 13.1

Es sei  $K$  ein Körper und  $N = (n_{ij}) \in K^{n \times n}$ , deren Einträge auf der oberen Nebendiagonalen 1 sind und alle anderen Einträge 0, d.h.

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i + 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für  $i, j = 1, \dots, n$ .

Zeigen Sie, dass für  $k \in \{1, \dots, n\}$  die Einträge der Matrix  $N^k = (n_{ij}^{(k)})$  auf der  $k$ -ten oberen Nebendiagonale 1 sind und alle anderen Einträge 0, d.h.

$$n_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i + k, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für  $i, j = 1, \dots, n$ .

### Aufgabe 13.2

Für  $d \in \mathbb{N}$  bezeichne  $\mathbb{Q}[x]_{\leq d}$  den Vektorraum der Polynome mit rationalen Koeffizienten vom Grad höchstens  $d$ . Betrachten Sie die Abbildung

$$\int : \mathbb{Q}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}, \\ ax^2 + bx + c \mapsto \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx.$$

- Zeigen Sie, dass  $f$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen ist.
- Bestimmen Sie bezüglich der Basen  $\mathcal{A} = (1, x, x^2)$  von  $\mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$  und  $\mathcal{B} = (1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3)$  die Darstellungsmatrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$  von  $f$ .
- Berechnen Sie  $f(p)$  für  $p = 2x^2 + 3x + 7$  mit Hilfe der darstellenden Matrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ . Stellen Sie das Ergebnis außerdem bezüglich der Basis  $(1, x, x^2, x^3)$  von  $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$  dar.

### Aufgabe 13.3

Sei  $F: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ . Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- $\text{rang}(F) < \dim V$
- Es existiert ein  $G \in \text{End}(V)$  mit  $G \neq 0$  aber  $F \circ G = 0$  („ $F$  ist ein Linksnullteiler“)
- Es existiert ein  $G \in \text{End}(V)$  mit  $G \neq 0$  aber  $G \circ F = 0$  („ $F$  ist ein Rechtsnullteiler“)