Klausur

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und ihre Matrikelnummer

Name: MatNr.:

Punkte:

Aufgabe	1	2	3	4	5
von	12	12	12	12	12

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Sie brauchen hier keine Begründung ihrer Antwort angeben. Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, jede falsche Antwort einen Minuspunkt. Ihre Punktzahl beträgt in jedem Fall mindestens Null.

1. Seien A, B Aussagen. Dann gilt $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.
2. Seien A, B beliebige Mengen und $f : A \to B$ injektiv. Dann gilt $|A| \leq |B|$.
3. Seien A, B endliche Mengen und $f : A \to B$ surjektiv. Dann gilt $|A| \leq |f^{-1}(B)|$.
4. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mit der Addition von Restklassen bildet eine Gruppe.
5. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation von Restklassen bildet eine Gruppe.
6. Die Vektoren 2 und $\sqrt{2}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ sind linear unabhängig.
7. Es existiert eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(e_1) = F(e_2) = e_1$.
8. Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ ist invertierbar.
9. $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \oplus \operatorname{span}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
10. Drei inhomogene lineare Gleichungen für 2 Unbekannte haben nie eine Lösung.
11. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wenn $v, w \in V$ linear abhängig sind, so gilt $v = w$.
12. Jede Teilmenge einer Basis eines Vektorraums ist linear unabhängig.

Aufgabe 2

Beantworten Sie folgende Fragen knapp:

1. Was ist die Kontraposition der Aussage *Wenn* $(v_i)_{i\in I}$ *eine linear unabhängige Famile von Vektoren ist, so lässt sich jedes* $v \in span(v_i)_{i\in I}$ *in eindeutiger Weise aus den* v_i *linear kombinieren*?

2. Wie ist die Charakteristik eines Körpers definiert?

3. Wie lautet die Dimensionsformel für lineare Abbildungen $F : V \to W$?

4. Seien $\mathcal{A}$ eine Basis eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Welche Zahl steht im (i, j)-Eintrag der Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{A}}(F)$?

Aufgabe 3

Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $\operatorname{rang}(F) < \dim V$

2. Es existiert ein $G \in \operatorname{End}(V)$ mit $G \neq 0$ aber $F \circ G = 0$ („F ist ein Linksnullteiler“)

Hinweis: Ergänzen Sie eine Basis von $\ker F$ zu einer Basis von V.

Aufgabe 4

Für $d \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{Q}[x]_{\leq d}$ den Vektorraum der Polynome mit rationalen Koeffizienten vom Grad höchstens d. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{Q}[x]_{\leq 3} &\to \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}, \\ p &\mapsto p + p', \end{aligned}$$

wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.

1. Bestimmen Sie bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (1, x, x(x-1), x(x-1)^2)$ die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(F)$.

2. Ist F ein Automorphismus?

3. Berechnen Sie $p + 2p' + p''$ für das Polynom

   $$p = -4 + 8x + 11x(x-1) - 7x(x-1)^2$$

   mit Hilfe der darstellenden Matrix $M_{\mathcal{B}}(F)$ aus a).

Aufgabe 5

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie Basen von $\ker A$ und $\operatorname{Im} A$ sowie den Rang von A.