Musterlösung zu Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1

Wir bezeichnen mit m_i den Anteil der Legierung M_i in der Mischung. Um die gewünschte Legierung mit 40 % Kupfer, 50 % Silber und 10 % Gold zu erhalten, muss gelten:
Für Kupfer:

$$\frac{20}{100} \cdot m_1 + \frac{70}{100} \cdot m_2 + \frac{50}{100} \cdot m_3 = \frac{40}{100}$$

Für Silber:

$$\frac{60}{100} \cdot m_1 + \frac{10}{100} \cdot m_2 + \frac{50}{100} \cdot m_3 = \frac{50}{100}$$

Für Gold:

$$\frac{20}{100} \cdot m_1 + \frac{20}{100} \cdot m_2 + \frac{0}{100} \cdot m_3 = \frac{10}{100}$$

Zum lösen diese Gleichungssystems multiplizieren wir alle Gleichungen mit 10 und erhalten folgende Matrixdarstellung, die wir dann auf Zeilenstufenform bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}\to\text{III}-\text{I}]{\text{II}\to\text{II}-3\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & -20 & -10 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & -20 & -10 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}\to\text{III}-4\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass eine eindeutige Lösung existiert für die gilt:

$$\begin{aligned} 10m_3 = 5, \text{ also } m_3 &= \frac{1}{2} \\ -5m_2 - 5m_3 = -3, \text{ also } m_2 &= \frac{1}{10} \\ 2m_1 + 7m_2 + 5m_3 = 4, \text{ also } m_1 &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Wir müssen noch überprüfen, dass $m_1 + m_2 + m_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = 1$, da sie Mischungsverhältnisse darstellen. Dies ist der Fall.

Antwort:
Ja, man kann die Legierungen so mischen, dass die gewünschte Legierung entsteht, das benötigte Mischungsverhältnis dazu ist: 40 % von M_1, 10 % von M_2 und 50 % von M_3.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 12.2
Wir benötigen Proposition 2.3.4.

a) Da A eine quadratische Matrix ist, genügt es den Rang von A zu bestimmen. Dazu Gauß:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III} \to \mathrm{III} - 3\mathrm{I}]{\mathrm{II} \to \mathrm{II} - 4\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III} \to 3\mathrm{III} - 2\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $\operatorname{rang} A = 3$, d. h. $Ax = b$ ist für alle $b \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar, insbesondere ist $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar.

Das Gleichungssystem $Bx = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} \left(B, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right) = 4.$$

Da B aber ein Element von $\mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R})$ ist, gilt $\operatorname{rang} B \leq 3 < 4$ und somit ist $Bx = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ nicht eindeutig lösbar.

b) Da $\operatorname{rang} A = 3$ (in Aufgabenteil a berechnet) und $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, ist $Ax = b$ universell lösbar.

Nun müssen wir noch den Rang von B bestimmen. Dazu Gauß:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III} \to 3\mathrm{III} - 2\mathrm{I}]{\mathrm{II} \to 3\mathrm{II} - 2\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III} \to \mathrm{III} + 5\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Also ist $\operatorname{rang} B = 3$. Da $B \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R})$ ist somit $Bx = b$ universell lösbar.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 12.3

Sei $W = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_m(x) = 0\}$. Wir können die linearen Gleichungen φ_i als Polynome in $\mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]$ betrachten. Wenn z. B. für $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) := 2x_1 - x_3$, dann ist $\varphi = 2t_1 - t_3 \in \mathbb{R}[t_1, t_2, t_3]$.

Sei $\widetilde{W} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ mit dem gewünschten Polynom

$$f := \sum_{i=1}^{m} \varphi_i^2 \in \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]$$

Wir werden zeigen, dass $W = \widetilde{W}$ und haben damit ein gewünschtes Polynom f gefunden. Dabei schreiben wir der Übersichtlichkeit halber $f(x_1, \dots, x_n)$ als $f(x)$.

Beweis für $W \subseteq \widetilde{W}$: Sei $x \in W$, also $\varphi_i(x) = 0$, $1 \leq i \leq m$, dann ist

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} \varphi_i^2\right)(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x)^2 = \sum_{i=1}^{m} 0 = 0$$

Also $x \in \widetilde{W}$.

Beweis für $\widetilde{W} \subseteq W$: Sei nun umgekehrt $x \in \widetilde{W}$, also

$$0 = f(x) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x)^2$$

Da für $r \in \mathbb{R}$ gilt, dass $r^2 \geq 0$ und eine Summe von nichtnegativen reellen Zahlen nur dann gleich 0 ist, wenn jede der Zahlen gleich 0 ist, ist folgt, dass für alle $1 \leq i \leq m$: $\varphi_i(x)^2 = 0$, also $\varphi_i(x) = 0$. Dies aber bedeutet, dass $x \in W$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 12.4

Sei $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 3; \mathbb{R})$ mit $\operatorname{rang} A = 2$, $b \in \mathbb{R}^2$ und $L = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = b\}$.

Nach Satz 2.3.2 ist $\text{Lös}(A, 0)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Dimension $3 - 2 = 1$, also $\text{Lös}(A, 0) = \mathbb{R}w$ mit $0 \neq w \in \mathbb{R}^3$ und es existiert ein $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ mit $L = \text{Lös}(A, b) = \varphi(b) + \text{Lös}(A, 0) = v + \mathbb{R}w$ für ein $v \in \mathbb{R}^3$. Also ist L eine Gerade.

Sei umgekehrt $L = v + \mathbb{R}w$ mit $v, w \in \mathbb{R}^3, w \neq 0$ eine Gerade. Sei o. B. d. A. $w \neq 0$ (sonst umsortieren), dann ist $L = \tilde{v} + \mathbb{R}w$ mit $\tilde{v}_3 = 0$ für $\tilde{v} = v - \frac{v_3}{w_3} w$. Behauptung:

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = b\} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -{w_1}/{w_3} \\ 0 & 1 & -{w_2}/{w_3} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix}$$

Beweis: Die Matrix A ist bereits in Zeilenstufenform, also können wir die Lösung leicht angeben:

$$x_3 := \lambda, x_2 = \frac{w_2}{w_3}\lambda + \tilde{v}_2, x_1 = \frac{w_1}{w_3}\lambda + \tilde{v}_1$$

Also

$$\text{Lös}(A, b) = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \frac{1}{w_3} w = \tilde{v} + \mathbb{R}w = L$$

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 12.5
Bezeichne:

$$\varphi : \{F \in \operatorname{Hom}(V,W) : F|_U = 0\} \to \operatorname{Hom}(V/U, W)$$
$$F \mapsto \bar{F}$$

und

$$\rho : V \to V/U$$
$$v \mapsto v + U$$

Nach der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraumes existiert für jedes $F \in \operatorname{Hom}(V,W)$ mit $U \subseteq \ker F$, also $F|_U = 0$ genau ein $\bar{F}$ mit $F = \bar{F} \circ \rho$.

Seien $F, G \in \operatorname{Hom}(V,W)$ mit $F|_U = G|_U = 0$ und $\bar{F} = \varphi(F) = \varphi(G) = \bar{G}$. Dann gilt

$$F = \bar{F} \circ \rho = \bar{G} \circ \rho = G.$$

Also ist φ injektiv.

Sei $\bar{H} \in \operatorname{Hom}(V/U, W)$. Dann gilt nach der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraumes für $H := \bar{H} \circ \rho \in \operatorname{Hom}(V,W)$ (Hintereinanderausführungen von linearen Abbildungen sind linear), dass

$$\varphi(H) = \bar{H} \text{ und } H|_U = 0,$$

da $\ker \rho = U$ und $\bar{H}$ linear. Also ist φ surjektiv.

Da φ injektiv und surjektiv ist, ist φ bijektiv, als lineare Abbildung also ein Isomorphismus.