Übungsblatt 10

Abgabe: Donnerstag, den 21.12.2017, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 10.1

Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ für $k > 2$ im Allgemeinen nicht äquivalent zu $V = W_1 + \cdots + W_k$ und $W_1 \cap \cdots \cap W_k = \{0\}$ bzw. $W_i \cap W_j = \{0\}$ für alle $i \neq j$ ist.

Aufgabe 10.2

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; K)$ heißt *symmetrisch*, falls $A^T = A$.

a) Zeigen Sie, dass die symmetrischen Matrizen einen Untervektorraum $\mathrm{Sym}(n; K)$ von $\mathrm{Mat}(n \times n; K)$ bilden. Geben Sie die Dimension und eine Basis von $\mathrm{Sym}(n; K)$ an.

Ist $\mathrm{char}\, K \neq 2$, so heißt $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; K)$ *schiefsymmetrisch* (oder *alternierend*), falls $A^T = -A$. Im Folgenden sei stets $\mathrm{char}\, K \neq 2$.

b) Zeigen Sie, dass die alternierenden Matrizen einen Untervektorraum $\mathrm{Alt}(n; K)$ von $\mathrm{Mat}(n \times n; K)$ bilden. Bestimmen Sie auch für $\mathrm{Alt}(n; K)$ die Dimension und eine Basis.

c) Für $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; K)$ sei $A_s := \frac{1}{2}(A + A^T)$ und $A_a := \frac{1}{2}(A - A^T)$. Zeigen Sie: A_s ist symmetrisch, A_a ist alternierend, und es gilt $A = A_s + A_a$.

d) Zeigen Sie: $\mathrm{Mat}(n \times n; K) = \mathrm{Sym}(n; K) \oplus \mathrm{Alt}(n; K)$.

Aufgabe 10.3

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (3x + 2y, x)$,

b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto ax + b$,

c) $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + \sqrt{2}y$ (über $\mathbb{Q}$),

d) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z}$,

e) $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(1)$,

f) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z}$ (über $\mathbb{R}$).

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 10.4
Für einen Endomorphismus $F : V \to V$ ist die Menge der *Fixpunkte* von F definiert durch $\operatorname{Fix} F := \{v \in V : F(v) = v\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Fix} F \subseteq V$ ein Untervektorraum ist.

b) Sei der Endomorphismus F gegeben durch

   i) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x,$

   ii) $F : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t], \quad P \mapsto P',$

   iii) $F : \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f'.$

   Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\operatorname{Fix} F$.

Aufgabe 10.5
Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus des Vektorraums V und $v \in V$, so dass für eine natürliche Zahl n gilt:

$$F^n(v) \neq 0 \quad \text{und} \quad F^{n+1}(v) = 0.$$

Beweisen Sie, dass dann $v, F(v), \ldots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.