Übungsblatt 11

Abgabe: Donnerstag, den 11.01.2018, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren Übungstermin.

Weihnachtsbonusaufgabe (2 Bonuspunkte): Protokollieren Sie ihr Vorgehen zu Aufgabe 11.2 in einem Lerntagebuch. Führen Sie in diesem alle Gedanken und inneren Monologe/Dialoge auf, die sie während der Bearbeitung der Aufgabe haben. Seien sie ehrlich, aber erzählen Sie möglichst keine Sachen die nicht für die Aufgabe relevant sind. Sie könnten so beginnen:
Donnerstag: Ich lese die Aufgabe – nicht klar was eine lineare Abbildung ist – vielleicht googeln? Pushmitteilung von YouTube bringt mich von Mathe ab.
Freitag: Skript lesen: Definition lineare Abbildung . . .

Der Sinn der Übung ist, dass die Lehrenden den Verstehensprozess der Lernenden besser kennenlernen. Vielleicht hilft es Ihnen auch ihre Vorgehensweisen zu reflektieren.

Nutzen Sie die Weihnachtspause bitte auch für Wiederholung. Schauen Sie sich ihr Skript nochmal an. Könnten Sie die Übungsaufgaben von Blatt 1-8 jetzt problemlos lösen? Könnten Sie einfache Argumente aus der Vorlesung ohne weitere Hilfsmittel selbst an der Tafel erklären?

Aufgabe 11.1

Seien zwei Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils Basen von $\operatorname{Ker} F$ und $\operatorname{Im} F$.

Aufgabe 11.2

a) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Weiter sei $W_0 := V$ und $W_{i+1} := F(W_i)$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $W_{m+i} = W_m$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

b) Gilt diese Aussage auch für unendlichdimensionale Vektorräume?

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 11.3
Bestimmen Sie alle $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 11.4
Beweisen sie, dass jede lineare Abbildung $K^n \to K^m$ von der Form $x \mapsto Ax$ für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; K)$ ist.

Aufgabe 11.5
Bestimmen Sie alle $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ die das Quadrat $Q := [-1,1]^2$ auf sich selbst abbilden, d.h. für die gilt $F(Q) = Q$. Welche algebraische Struktur hat die Menge dieser Abbildungen?

Hinweis: Sie könnten alle solchen linearen Abbildungen (z.B. nach Aufgabe 11.4 als Matrizen) auflisten, aber effizienter ist es die Ringstruktur von $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ zu nutzen.