Übungsblatt 12

Abgabe: Donnerstag, den 18.01.2018, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 12.1

Es seien Metall-Legierungen M_1, M_2 und M_3 gegeben, die alle Kupfer, Silber und Gold enthalten, und zwar in folgenden Prozentsätzen:

	Kupfer	Silber	Gold
M_1	20	60	20
M_2	70	10	20
M_3	50	50	0

Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40 % Kupfer, 50 % Silber und 10 % Gold enthält?

Aufgabe 12.2

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme darauf, ob sie eindeutig lösbar sind:

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad Bx = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

b) Untersuchen SIe die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Bx = b$ für beliebige $b \in \mathbb{R}^3$ darauf, ob sie universell lösbar sind.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 12.3
Sei der Untervektorraum $W \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben durch m lineare Gleichungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, d. h.

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_m(x) = 0\}\,.$$

Zeigen Sie, dass dann ein Polynom $f \in \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_n]$ existiert mit

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}\,.$$

Aufgabe 12.4
Zeigen Sie, dass eine Teilmenge L des $\mathbb{R}^3$ genau dann eine Gerade ist (d. h. es existieren $v, w \in \mathbb{R}^3, w \neq 0$, mit $L = v + \mathbb{R}w$), wenn es eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 3; \mathbb{R})$ mit $\mathrm{rang}\, A = 2$ und ein $b \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass $L = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = b\}$. Was bedeutet das geometrisch?

Aufgabe 12.5
Zeigen Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraumes, dass für Vektorräume V, W sowie einen Untervektorraum $U \subseteq V$ die lineare Abbildug

$$\begin{aligned} \{F \in \mathrm{Hom}(V, W) : F|_U = 0\} &\to \mathrm{Hom}(V/U, W) \\ F &\mapsto \bar{F} \end{aligned}$$

(vgl. Satz 2.2.13) ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.