Übungsblatt 3

Abgabe: Donnerstag 2.11.17, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 3.1

Sei G eine Gruppe in der für jedes Element $g \in G$ gilt $g^2 = e$. Zeigen Sie, dass G eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 3.2

Die *Kleinsche Vierergruppe* (benannt nach Felix Klein) besteht aus den vier Elementen $\{e, a, b, ab\}$ wobei e das Neutralelement bezeichnet. In ihr gilt $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$.

a) Stellen Sie die Gruppentafel der Kleinschen Vierergruppe auf.

b) Finden Sie alle Untergruppen der Kleinschen Vierergruppe.

Aufgabe 3.3

Betrachten Sie die symmetrische Gruppe S_3 auf $\{1, 2, 3\}$. Eine nützliche Schreibweise für Elemente der S_n ist die *einzeilige Notation* bei der ein Element $\sigma \in S_n$ als Auflistung der Bilder $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ geschrieben wird.

a) Listen Sie alle Elemente der S_3 explizit auf.

b) Finden Sie 2 Elemente $\sigma, \tau \in S_3$ mit $\tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau$.

c) Finden Sie einen nicht-trivialen Gruppenhomomorphismus $S_3 \to S_3$, d.h. einen, dessen unterliegende Mengenabbildung nicht die Identität ist.

Aufgabe 3.4

Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind.

a) $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad x \mapsto 2x$

b) $(\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}, +), \quad x \mapsto 2x$

c) $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad x \mapsto x^2 + 1$

d) $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +), \quad x \mapsto x + 1$

Aufgabe 3.5

Bestimmen Sie alle Gruppen mit 4 Elementen bis auf Isomorphie.