Übungsblatt 4

Abgabe: Donnerstag, den 09.11.2017, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 4.1

Sei G eine Gruppe und $A \subset G$ eine Teilmenge. Die *von A erzeugte Untergruppe* ist

$$\langle A \rangle := \{a_1 \cdots a_n : n \in \mathbb{N}, a_i \in A \text{ oder } a_i^{-1} \in A\}.$$

Zeigen Sie

a) $\langle A \rangle$ ist eine Untergruppe von G.

b) Falls $U \subset G$ eine beliebige Untergruppe von G ist, die A enthält, so enthält U auch $\langle A \rangle$.

Damit kann $\langle A \rangle$ als *die kleinste Untergruppe die A enthält* bezeichnet werden. Man sagt *A erzeugt G* falls $\langle A \rangle = G$.

c) Finden sie eine möglichst kleine Menge $A \subset S_3$ die S_3 erzeugt.

Aufgabe 4.2

Für ein $x \in \mathbb{R}$ sei $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$, d.h. die größte ganze Zahl die kleiner oder gleich x ist. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Es gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist.

Für $x \in \mathbb{R}$, sei $A_x := \{a \in \mathbb{R} : a \sim x\}$ die zugehörige Äquivalenzklasse. Definiere eine Addition auf Äquivalenzklassen von $\sim$ folgendermaßen:

$$A_x + A_y := A_{x+y}$$

b) Untersuchen Sie, ob diese Addition wohldefiniert ist.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 4.3

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen, jeweils zusammen mit den gegebenen Verknüpfungen einen Ring oder sogar einen Körper bilden.

a) $(\{0, 1, a, a+1\}, \oplus, \odot)$ mit den Verknüpfungstafeln

$\oplus$	0	1	a	$a+1$
0	0	1	a	$a+1$
1	1	0	$a+1$	a
a	a	$a+1$	0	1
$a+1$	$a+1$	a	1	0

und

$\odot$	0	1	a	$a+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	a	$a+1$
a	0	a	$a+1$	1
$a+1$	0	$a+1$	1	a

Welche der Ihnen bekannten Gruppen auf 4 Elementen ist $(\{0, 1, a, a+1\}, \oplus)$?

b) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$, wobei die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

mit der induzierten Addition und Multiplikation von reellen Zahlen versehen wird, d.h. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ usw.

c) $(\mathrm{Abb}(M, \mathbb{K}), +, \cdot)$, die Menge aller Abbildungen von einer Menge M in einen Körper $\mathbb{K}$ zusammen mit der punktweisen Addition und Multiplikation von Abbildungen, d.h. für $f, g \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{K})$ und ein beliebiges $m \in M$ gilt $(f+g)(m) := f(m)+g(m)$ und $(f \cdot g)(m) := f(m) \cdot g(m)$.

Aufgabe 4.4

Sei $\mathrm{E}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ die Menge der multiplikativ invertierbaren Elemente (genannt *Einheiten*) des Restklassenringes $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie, dass $(E(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist. (Dabei ist $\cdot$ die von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ geerbte Multiplikation für Restklassen modulo m.)

b) Wieviele Elemente hat die Gruppe $(E(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \cdot)$ für $m = 2, 3, 4, 5, 6$?

Aufgabe 4.5

Sei $\varphi : K \to K'$ ein Ringhomomorphismus zwischen Körpern K, K'. Zeigen Sie, dass φ injektiv ist, oder alle $k \in K$ auf $0 \in K'$ abbildet. (N.b. Im zweiten Fall sagt man φ *ist null*, $\varphi = 0$.)