Übungsblatt 7

Abgabe: Donnerstag, den 30.11.2017, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 7.1

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme:

a)

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -15x_1 + 14x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.2

Bestimmen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem mit folgender erweiterter Koeffizientenmatrix lösbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Lösung an.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right)$$

Aufgabe 7.3

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem auf einem Taschenrechner mit einer Rechengenauigkeit von n Stellen hinter dem Komma (Abschneiden weiterer Stellen ohne Rundung!) für $\varepsilon = 10^{-k}$ für größer werdendes $k \leq n$, und zwar einmal mit dem Pivot ε und einmal mit dem „maximalen Zeilenpivot“ 1 der ersten Spalte.

$$\begin{aligned} x + y &= 2, \\ \varepsilon x + y &= 1. \end{aligned}$$

Erklären Sie die beobachteten Effekte.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 7.4

Beweisen Sie Lemma 1.4.9 aus der Vorlesung:

Sei V ein Vektorraum, I eine beliebige Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei ein Untervektorraum W_i gegeben. Dann ist der Durchschnitt

$$W := \bigcap_{i \in I} W_i \subset V$$

wieder ein Untervektorraum.

Aufgabe 7.5

Sei $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2; K)$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen über einem Körper K. Finden Sie eine möglichst kleine Menge $M \subset V$ mit $\mathrm{span}_K(M) = V$. Können Sie beweisen, dass es keine kleinere Menge als Ihre geben kann?