Übungsblatt 8

Abgabe: Donnerstag, den 07.12.2017, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 8.1

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

a) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

b) $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$ im $\mathbb{R}^3$.

c) $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}^*_+, \mathbb{R})$.

d) $\Big(\cos(nx), \sin(mx)\Big)_{n,m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 8.2

Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$(1,3,4), \quad (3,t,11), \quad (-1,-4,0).$$

Aufgabe 8.3

Stellen Sie den Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ jeweils als Linearkombination der drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ dar:

a) $w = (6,2,1), v_1 = (1,0,1), v_2 = (7,3,1), v_3 = (2,5,8)$.

b) $w = (2,1,1), v_1 = (1,5,1), v_2 = (0,9,1), v_3 = (3,-3,1)$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 8.4

Sei K ein Körper und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n; K)$ eine $n \times n$ Matrix über K. Dann nennen wir die Summe der Diagonalelemente

$$\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Spur von A. Sei

$$\mathfrak{sl}_2 := \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{C}) : \mathrm{Spur}(A) = 0\},$$

der $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen 2×2 Matrizen mit Spur 0. Prüfen Sie kurz (ohne Abgabe) warum $\mathfrak{sl}_2$ ein Vektorraum ist.

Aufgabe: Finden Sie eine Basis für $\mathfrak{sl}_2$.

Hinweis: Verstehen Sie erst $\mathfrak{sl}_2$ als Untervektorraum eines bekannten Vektorraums. Welche Anzahlen von Basisvektoren sind möglich? Wie viele vermuten Sie für $\mathfrak{sl}_2$? Finden Sie genügend viele linear unabhängige Elemente von $\mathfrak{sl}_2$.

Aufgabe 8.5

Man könnte versuchen lineare Algebra statt über Körpern auch über Ringen zu betreiben. Der einfachste Ring ist $\mathbb{Z}$ und $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}$ kann analog zu span_K für einen Körper K definiert werden. Zeigen Sie

$$\mathbb{Z} = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(2, 3) = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(1),$$

Erklären Sie kurz den fundamentalen Unterschied zur linearen Algebra über Körpern und begründen Sie warum dieser Effekt eintritt.