Übungsblatt 9

Abgabe: Donnerstag, den 14.12.2017, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 9.1

Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren $v_1 = (4, 1, 1, 0, -2)$, $v_2 = (0, 1, 4, -1, 2)$, $v_3 = (4, 3, 9, -2, 2)$, $v_4 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $v_5 = (0, -2, -8, 2, -4)$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von $V = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

b) Wählen Sie alle möglichen Basen von V aus den Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 aus, und kombinieren Sie jeweils v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 daraus linear.

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie für die folgenden Vektorräume jeweils eine Basis und weisen Sie die Basiseigenschaften nach.

a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\}$,

b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,

c) $\operatorname{span}(t^2, t^2 + t, t^2 + 1, t^2 + t + 1, t^7 + t^5) \subset \mathbb{R}[t]$,

d) $\{f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 9.3

Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ endlich erzeugt über $\mathbb{R}$ ist, aber $\mathbb{R}$ nicht endlich erzeugt über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 9.4

Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V definieren wir

$$h(V) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{es gibt eine Kette } V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n \text{ von Untervektorräumen } V_i \subseteq V\}.$$

Zeigen Sie $h(V) = \dim(V)$. Hier bezeichnet sup die kleinste obere Schranke der Menge (∞ falls die Menge unbeschränkt ist).

Aufgabe 9.5

Wie viele Elemente hat ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper?