Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. A. Pott, C. Kaspers, A. Polujan, U. Risch

Wintersemester 2019/20
16. Oktober 2019

Übungsblatt 1

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Seien M, N, P beliebige Mengen. Zeigen Sie:

a) $(M \cup N) \cap P = (M \cap P) \cup (N \cap P)$;

b) $M \subseteq N \Leftrightarrow M \cup N = N$.

Aufgabe P.2

Geben Sie die Potenzmenge der Potenzmenge der leeren Menge $\{\ \}$ an.

Aufgabe P.3

Es seien A, B und C Teilmengen von $\mathbb{R}$:

- $A = \{x \ : \ -2 < x \leq 1\}$;
- $B = \{x \ : \ |x| < 1\}$;
- $C = \{x \ : \ x(x+2)(x-1) = 0\}$.

Bestimmen Sie

a) $A \cap B$;

b) $A \cap B \cap C$;

c) $A \cap (B \cup C)$;

d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Aufgabe P.4

Was ist falsch an folgendem "Beweis", dass jede symmetrische und transitive Relation R auf einer Menge M auch reflexiv sein muss: Gegeben seien $x, y \in M$ mit $(x, y) \in R$. Dann gilt wegen der Symmetrie auch $(y, x) \in R$. Wegen der Transitivität folgt aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ auch $(x, x) \in R$.

Aufgabe P.5

Eine Relation R auf M heißt **asymmetrisch**, wenn aus $(x, y) \in R$ stets folgt $(y, x) \notin R$.

a) Geben Sie Beispiele von asymmetrischen Relationen an.

b) Zeigen Sie: Jede asymmetrische Relation ist auch antisymmetrisch.

Aufgabe P.6
Auf der Menge $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definieren wir eine Relation wie folgt:

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) :\Leftrightarrow p_1 \cdot q_2 = q_1 \cdot p_2.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen.

Aufgabe P.7
Relationen auf $\mathbb{R}$ sind Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, wir können sie also in der Zeichenebene darstellen. Ins diesem Sinne skizzieren Sie bitte alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

a) welche die Relation "$\leq$" erfüllen;

b) für die $x \leq y$ **und** $x^2 - y^2 \leq 1$ gilt.

Hausaufgaben (Abgabe am 24.10. in der Vorlesung)

Aufgabe H.1 (1+1+1 Punkte)
Es seien $A = \{2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ und $C = \{6, 7\}$. Geben Sie die Mengen

a) $A \times (B \cup C)$;

b) $A \times (A \cup B)$;

c) $(A \times B) \cup (B \times C)$

an.

Aufgabe H.2 (1+1+1 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für beliebige Mengen M, N, P und Q wahr oder falsch sind (Beweis oder Gegenbeispiel):

a) $M \times (N \cup P) = M \times N \cup M \times P$;

b) $(M \cup N) \times (P \cup Q) = (M \times P) \cup (N \times Q)$;

c) $(M \cap N) \times (P \cap Q) = (M \times P) \cap (N \times Q)$.

Aufgabe H.3 (2 Punkte)
Bestimmen Sie alle Relationen, die asymmetrisch und reflexiv sind.

Aufgabe H.4 (1+1 Punkte)
Bestimmen Sie die Anzahl aller Relationen und die Anzahl aller Äquivalenzrelationen auf $\{1, 2, 3\}$.

Aufgabe H.5 (1+1+1 Punkte)
Auf der Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definieren wir eine Relation wie folgt:

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) :\Leftrightarrow p_1 \cdot q_2 = q_1 \cdot p_2.$$

Untersuchen Sie diese Relation auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

Aufgabe H.6 (1+2 Punkte)
Relationen auf $\mathbb{R}$ sind Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, wir können sie also in der Zeichenebene darstellen. In diesem Sinne skizzieren Sie bitte alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

a) welche die Relation "=" erfüllen;

b) für die $x \geq y$ **oder** $x^2 + y^2 = 1$ gilt.