Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. A. Pott, C. Kaspers, A. Polujan, U. Risch

Wintersemester 2019/20
19. Dezember 2019

Übungsblatt 10

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Berechnen Sie die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P.2

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit der Cramer'schen Regel.

Aufgabe P.3

Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{B} := (\beta_{i,j})$ in $\mathbb{K}^{(n,n)}$ mit

$$\beta_{i,j} = \begin{cases} a, & \text{wenn } i = j, \\ b, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Aufgabe P.4

Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Sind B und C Basen von V, so gilt

$$\det([f]_B^B) = \det([f]_C^C).$$

Da also die Determinante unabhängig von der konkreten Basis ist, nennen wir diese Zahl auch die Determinante von f.

Hausaufgaben (Abgabe am 09.01. in der Vorlesung)

Aufgabe H.1 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Determinanten von

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H.2 (4 Punkte)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \end{pmatrix}$$

mit der Cramer'schen Regel.

Aufgabe H.3 (4=3+1 Punkte)
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$. Zeigen Sie, dass $\det(\mathbf{A}) = 0$ für ungerade n gilt. Untersuchen Sie, ob diese Aussage auch für gerade n gilt.

Aufgabe H.4 (4 Punkte)
Sei $V = \mathbb{K}^{(n,n)}$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{(n,n)}$. Wir definieren auf V eine lineare Abbildung $L_{\mathbf{A}}$ wie folgt:

$$L_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}.$$

Zeigen Sie:

$$\det L_{\mathbf{A}} = \det(\mathbf{A})^n,$$

wobei die Determinante der linearen Abbildung $L_{\mathbf{A}}$ wie in Aufgabe P.4 definiert ist.

Hinweis: Sei $\boldsymbol{X}_{s,t}$ die Matrix, deren Einträge alle 0 sind, bis auf den Eintrag an Position (s,t); dieser Eintrag ist 1. Diese Matrizen bilden die kanonische Basis von $\mathbb{K}^{(n,n)}$. Betrachten Sie nun die Darstellungsmatrix von $L_{\boldsymbol{A}}$ bezüglich der geordneten Basis

$$(\boldsymbol{X}_{1,1}, \boldsymbol{X}_{2,1}, \ldots, \boldsymbol{X}_{n,1}, \boldsymbol{X}_{1,2}, \boldsymbol{X}_{2,2}, \ldots, \boldsymbol{X}_{n,2}, \ldots, \boldsymbol{X}_{1,n}, \boldsymbol{X}_{2,n}, \ldots, \boldsymbol{X}_{n,n}).$$

Beachten Sie, dass die Darstellungsmatrix in $\mathbb{K}^{(n^2,n^2)}$ liegt.