Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. A. Pott, C. Kaspers, A. Polujan, U. Risch

Wintersemester 2019/20
09. Januar 2020

Übungsblatt 11

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Gegeben sei $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ als

$$\mathbf{T} := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 13 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{T}$. Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von $\mathbf{T}$ an.

b) Geben Sie eine Matrix $\mathbf{P}$ sowie $\mathbf{P}^{-1}$ an, sodass

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe P.2

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}.$$

Untersuchen Sie, ob $\mathbf{A}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe P.3

Begründen Sie, warum jede Matrix $\mathbf{T}$ in $\mathbb{R}^{(2n+1,2n+1)}$ einen Eigenwert hat. Geben Sie eine Matrix $\mathbf{S}$ in $\mathbb{Z}_2^{(3,3)}$ an, die keinen Eigenwert hat.

Aufgabe P.4

Geben Sie hinreichende und notwendige Bedingungen an, wann die Matrix $\lambda\mathbf{I}+\mu\mathbf{J} \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ diagonalisierbar ist. Dabei sind $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $\mathbf{I}$ ist die Einheitsmatrix und $\mathbf{J}$ die Matrix, deren sämtlichen Einträge 1 sind.

Hausaufgaben (Abgabe am 16.01. in der Vorlesung)

Aufgabe H.1 (5=1+1+2+1 Punkte)
Sei

$$\mathbf{T} := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $\mathbf{T}$.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{T}$.

c) Geben Sie eine Basis aus Eigenvektoren von $\mathbf{T}$ an.

d) Geben Sie eine Matrix $\mathbf{P}$ sowie $\mathbf{P}^{-1}$ an, sodass

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe H.2 (5 Punkte)
Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,3)}.$$

Untersuchen Sie, ob $\mathbf{A}$ diagonalisierbar ist. Geben Sie ggf. eine Matrix $\mathbf{P}$ an, sodass $\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe H.3 (3 Punkte)
Eine Matrix $\mathbf{N} \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ heißt **nilpotent**, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mathbf{N}^m = \mathbf{0}$ (dabei ist $\mathbf{0}$ die Nullmatrix). Beispiele sind

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass eine nilpotente Matrix den Eigenwert 0 hat und keinen Eigenwert $\lambda \neq 0$.

Aufgabe H.4 (3 Punkte)

Zeigen Sie: Das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

ist

$$(-1)^n \cdot \left(x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right).$$