Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. A. Pott, C. Kaspers, A. Polujan, U. Risch

Wintersemester 2019/20
16. Januar 2020

Übungsblatt 12

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Sei $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 - x_1y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_1.$$

a) Geben Sie ${}_E[f]_E$ bezüglich der kanonischen Basis E an.

b) Geben Sie ${}_B[f]_B$ bezüglich der Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an.

c) Geben Sie ${}_B[f]_E$ an.

Aufgabe P.2

Sei $f, g \in \mathbb{K}[x]$, $g \neq 0$. Zeigen Sie: Wenn für $i = 1, 2$ gilt $f = gq_i + r_i$ mit $r_i = 0$ oder $\mathrm{Grad}(r_i) < \mathrm{Grad}(g)$, dann $q_1 = q_2$ und $r_1 = r_2$.

Aufgabe P.3

Sei $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{(6,6)}$ mit $\chi_{\mathbf{T}} = (x+1)^6$ sowie $\dim(\mathrm{Eig}(\mathbf{T}, -1)) = 4$. Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen für $\mathbf{T}$ an.

Aufgabe P.4

Finden Sie q, r wie in Aufgabe P.2 für

a) $f, g \in \mathbb{R}[x]$ mit $f = 6x^5 - x^4 + 18x^3 + 3x^2 + 11x + 1$ und $g = 2x^3 - x^2 + 5x$,

b) $f, g \in \mathbb{Z}_3[x]$ mit $f = 2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$ und $g = 2x^2 + x + 1$.

Hausaufgaben (Abgabe am 23.01. in der Vorlesung)

Aufgabe H.1 (4=2+2 Punkte)
Finden Sie die Vielfachheiten der Nullstelle λ von f für

a) $f = x^4 + x^3 + x + 1$, $f \in \mathbb{Z}_2[x]$, und $\lambda = 1$,

b) $f = x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8$, $f \in \mathbb{R}[x]$, und $\lambda = 2$.

Aufgabe H.2 (4=1+3 Punkte)

a) Geben Sie für die Bilinearform aus Aufgabe P.1 und die dort angegebenen Basen die Matrix ${}_E[f]_B$ an.

b) Geben Sie Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ an, sodass

$$\mathbf{P} \cdot {}_E[f]_B \cdot \mathbf{Q} = {}_B[f]_E$$

gilt.

Aufgabe H.3 (4 Punkte)
Sei $f \in \mathbb{K}[x]$ und $\mathbf{T} \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ sowie $\mathbf{S} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}$. Zeigen Sie:

$$f(\mathbf{S}) = \mathbf{P}^{-1} \cdot f(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{P}.$$

Aufgabe H.4 (4=2+2 Punkte)
Sei

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,4)}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $\mathbf{T}$.

b) Setzen Sie die Matrix $\mathbf{T}$ in das Polynom $(2 - x)(x^2 + 1)$ ein.