Übungsblatt 13

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Welche der drei Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind positiv definit:

a)

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2,$$

b)

$$g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2,$$

c)

$$h(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = |x_1| \cdot |y_1| + |x_2| \cdot |y_2|.$$

Aufgabe P.2

Entscheiden Sie mit dem *Cholesky*-Ansatz aus (8.9), welche der folgenden beiden Matrizen aus $\mathbb{R}^{(3,3)}$ positiv definit sind:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P.3

Wenden Sie das Gram-Schmidsche Orthonormalisierungsverfahren an, um ausgehend von den drei Vektoren

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ (bezüglich des gewöhnlichen Skalarproduktes) zu finden.

Aufgabe P.4

Zeigen Sie: Wenn $c_1, \ldots, c_m \neq 0$ auf einem IP Raum paarweise orthogonal sind, dann sind sie linear unabhängig.

Aufgabe P.5

Gegeben sei die symmetrische Bilinearform

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

auf $\mathbb{Z}_2^2$.

a) Geben Sie ${}_B[f]_B$ bezüglich der kanonischen Basis B an.

b) Zeigen Sie, dass es keine Basis C gibt, so dass ${}_C[f]_C$ eine Diagonalmatrix ist.