Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. A. Pott, C. Kaspers, A. Polujan, U. Risch

Wintersemester 2019/20
30. Januar 2020

Übungsblatt 14

Dieses Blatt wird in einer Übung für alle Gruppen am Freitag, 31. Januar 2020, 9–11 Uhr, in Raum G22A-020 besprochen.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten knapp.

a) Die Menge $U = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

b) Sei $f\colon V \to V$ linear, und sei $v \in \operatorname{Kern}(f)$. Dann ist $(f \circ f)(v) = 0$.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

c) Die Semibilinearform $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_2 y_2$ ist positiv definit.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung: _____

_____

Aufgabe P.2

Gegeben seien zwei Unterräume $U_1 = \langle v_1, v_2 \rangle, U_2 = \langle v_3, v_4 \rangle \leq \mathbb{R}^4$, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\dim U_1$ und $\dim U_2$.

b) Geben Sie eine Basis und die Dimension von $U_1 + U_2$ an.

c) Geben Sie eine Basis und die Dimension von $U_1 \cap U_2$ an.

Aufgabe P.3

Sei $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ eine lineare Abbildung mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y + 4z \\ 4y + 2z \\ 2x + 4y \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von $\mathrm{Kern}(f)$ sowie $\mathrm{Bild}(f)$.

b) Untersuchen Sie, ob die Abbildung f bijektiv ist.

c) Ermitteln Sie, für welche $b \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$$

1) keine Lösung 2) genau eine Lösung 3) mehrere Lösungen hat. Begründen Sie Ihre Antworten und geben Sie die Lösungsmenge im Fall 3) an.

Aufgabe P.4

Sei $E = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis und sei $B = (b_1, b_2) = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right))$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$f(b_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f(b_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix $[f]_E^B$ an.

b) Ermitteln Sie $[f]_B^B$.

c) Ermitteln Sie $[f]_E^E$ und geben Sie Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{P}^{-1}$ an, sodass

$$[f]_E^E = \mathbf{P}^{-1} \cdot [f]_B^B \cdot \mathbf{P}$$

gilt.

d) Geben Sie auch $[f]_B^E$ an.

Aufgabe P.5

Gegeben sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(3,3)}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & i \\ -1-i & i & 2 \\ 2+2i & 1-i & a \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}$.

b) Ermitteln Sie, für welche $a \in \mathbb{C}$ die Matrix $\mathbf{A}$ nicht invertierbar ist.

Aufgabe P.6

Gegeben sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ ist $-x^3 + x^2 + 2x$.

a) Finden Sie alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

b) Finden Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

c) Geben Sie eine Matrix $\mathbf{P}$ so an, dass

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt.