Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. A. Pott, C. Kaspers, A. Polujan, U. Risch

Wintersemester 2019/20
23. Oktober 2019

Übungsblatt 2

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Sei $f : X \to Y$ und seien $A, B \subseteq Y$ und $M, N \subseteq X$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind (Beweis oder Gegenbeispiel):

a) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$;

b) $f[M \cap N] = f[M] \cap f[N]$;

c) $f[f^{-1}[A]] = A$.

Aufgabe P.2

Die Menge der Drehungen und Spiegelungen im dreidimensionalen Raum, die die Ecken eines Tetraeders auf sich selber abbilden, ist eine Gruppe. Bestimmen Sie die Ordnung dieser Gruppe und entscheiden Sie, ob diese kommutativ ist.

Aufgabe P.3

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Es gibt $g : N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$ genau dann, wenn f surjektiv ist.

Hausaufgaben (Abgabe am Mittwoch (!), 30.10., in der Vorlesung)

Aufgabe H.1 (4 Punkte)
Beweisen Sie Aussage (2) aus Satz (2.1) der Vorlesung: Sei $(G, 0, +)$ eine Gruppe. Wenn für $g, h, h' \in G$ gilt, dass $h + g = g + h = 0$ und $h' + g = g + h' = 0$, dann folgt $h = h'$.

Aufgabe H.2 (5 Punkte)
Sei $(G, 0, +)$ eine Gruppe. Zeigen Sie: Wenn für jedes Element $g \in G$ gilt $g + g = 0$, dann ist G eine abelsche (also kommutative) Gruppe.

Aufgabe H.3 (3 Punkte)
Die Menge aller Drehungen und Spiegelungen, die die Ecken eines Quadrates wieder auf seine Ecken abbilden, ist eine Gruppe. Bestimmen Sie die Ordnung dieser Gruppe und entscheiden Sie, ob sie kommutativ ist.

Aufgabe H.4 (4=1+1+1+1 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$;

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 2x$;

c) $f : \mathbb{Z} \to \{x \ : \ x \in \mathbb{Z} \text{ und } x \text{ ist gerade}\},\ x \mapsto 2x$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto e^x$.