Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. A. Pott, C. Kaspers, A. Polujan, U. Risch

Wintersemester 2019/20
30. Oktober 2019

Übungsblatt 3

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Berechnen Sie:

a) 3^{-1} in $\mathbb{Z}_{11}$; **b)** $5 \cdot 9$ in $\mathbb{Z}_{13}$; **c)** 12^{10} in $\mathbb{Z}_{13}$.

Aufgabe P.2

Zeigen Sie: Es gibt keine ganzen Zahlen x, y mit $x^2 + y^2 \equiv 6 \bmod 8$.

Aufgabe P.3

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie, dass

$$(\mathbb{K} \setminus \{0\} \times \mathbb{K}, (1, 0), \oplus)$$

eine Gruppe ist, wobei die Addition wie folgt definiert ist:

$$(x, y) \oplus (x', y') := (x \cdot x', y + x \cdot y').$$

Hausaufgaben (Abgabe am Donnerstag, 7.11., in der Vorlesung)

Aufgabe H.1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Summe zweier Quadratzahlen nie $\equiv 3 \bmod 4$ sein kann.

Aufgabe H.2 (4 Punkte)
Sei M eine Menge. Auf der Potenzmenge 2^M definieren wir eine Verknüpfung wie folgt:

$$A \,\Delta\, B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Zeigen sie, dass $(2^M, \{\,\}, \Delta)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe H.3 (4 = 3+1 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, 1, \odot)$ eine Gruppe ist, wobei

$$x \odot y := \begin{cases} 2 \cdot x \cdot y & \text{wenn } x, y < 0 \\ x \cdot y & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \odot)$ kein Körper ist, wobei die Addition die übliche Addition auf $\mathbb{R}$ ist und die Multiplikation $\odot$ wie oben definiert wird (jetzt aber auf ganz $\mathbb{R}$):

$$x \odot y := \begin{cases} 2 \cdot x \cdot y & \text{wenn } x, y < 0 \\ x \cdot y & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe H.4 (4 Punkte)
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{C}$ mit irgendeiner Methode:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & i \cdot x_2 & = & -i \\ i \cdot x_1 & + & x_2 & = & 1 + i. \end{array}$$