Übungsblatt 5

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen einen Vektorraum mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation (vgl. Skript) bilden.

a)

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; : \; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

b)

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; : \; x \cdot y = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

c)

$$U := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; : \; f(x) = -f(-x) \} \subseteq \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}.$$

Aufgabe P.2

Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen linear abhängig und welche linear unabhängig sind.

a)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ über } \mathbb{R}.$$

b)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} \right\} \text{ über } \mathbb{C}.$$

Aufgabe P.3

Sei $G := \{a + \lambda b \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade, wobei

$$a := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $E := \{c + \mu d + \gamma e \,:\, \mu, \gamma \in \mathbb{R}\}$ eine Ebene, wobei

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, falls möglich, alle $x \in \mathbb{R}$ so, dass G und E keinen Schnittpunkt haben.

Hausaufgaben (Abgabe am 21.11. in der Vorlesung)

Aufgabe H.1 (4=2+2 Punkte)
Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen einen Vektorraum mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation (vgl. Skript) bilden.

a)

$$U := \{ \begin{pmatrix} a+b \\ a-c \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

b)

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Aufgabe H.2 (4=2+2 Punkte)
Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen linear abhängig und welche linear unabhängig sind.

a)

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \text{ über } \mathbb{Z}_5.$$

b)

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \} \text{ über } \mathbb{R}.$$

Aufgabe H.3 (4 Punkte)
Zeigen Sie: Die Seitenmitten eines Vierecks mit den verschiedenen Ecken A, B, C und D bilden ein Parallelogramm, d.h. gegenüberliegende Seiten sind parallel.

Aufgabe H.4 (4=2+2 Punkte)

Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, wobei $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, definieren wir die zu z komplex konjugierte Zahl $\overline{z}$ als

$$\overline{z} := a - ib.$$

Ferner sei

$$U := \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ : \ f(\overline{z}) = \overline{f(z)}\}.$$

a) Untersuchen Sie, ob U ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

b) Untersuchen Sie, ob U ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist (d. h., Sie erlauben nur, die Funktionen in U mit reellen Zahlen zu multiplizieren).

Hinweis: Die Menge $\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$ ist mit der gewöhnlichen Addition und skalaren Multiplikation ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.