Übungsblatt 6

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind. Stellen Sie jeden der Vektoren durch die anderen dar (falls möglich). Welche Dimension hat der von v_1, v_2, v_3 erzeugte Vektorraum?

Aufgabe P.2

a) Bestimmen Sie die Anzahl aller Basen von $\mathbb{Z}_3^2$.

b) Bestimmen Sie die Anzahl aller zweidimensionalen Unterräume von $\mathbb{Z}_5^4$.

Aufgabe P.3

Gegeben seien zwei Unterräume U_1 und U_2 von $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U_1 &:= \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}, \\ U_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \ : \ x - y - z = 0 \text{ und } y + z - u = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ermitteln Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe P.4

Untersuchen Sie, welche Standardbasisvektoren man zu den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

hinzufügen kann, um eine Basis von $\mathbb{R}^4$ zu erhalten. Mit welchen geht das nicht?

Hausaufgaben (Abgabe am 28.11. in der Vorlesung)

Aufgabe H.1 (4=2+2 Punkte)
Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 21 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Schreiben Sie den Vektor v_4 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3.

Aufgabe H.2 (4 Punkte)
Seien U_1 und U_2 wie in Aufgabe P.3. Bestimmen Sie die Dimension von $U_1 + U_2$ und geben Sie eine Basis von $U_1 + U_2$ an.

Aufgabe H.3 (4 Punkte)
Sei $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$$

eine Basis bildet.

Aufgabe H.4 (4=2+2 Punkte)

a) Geben Sie alle Basen von $\mathbb{Z}_2^2$ an.

b) Sei

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{Z}_2^4.$$

Listen Sie alle Elemente von U auf. Geben Sie ferner eine Basis von U an und bestimmen Sie die Dimension von U.