Übungsblatt 7

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear sind.

a)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ y \end{pmatrix}$$

b)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

c)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$$

d)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ y \end{pmatrix}$$

e)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe P.2

Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+2z \\ 2x+y \\ -x-2y+2z \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Basis des Kerns von T und eine des Bildes von T an.

Aufgabe P.3

Zeigen Sie: Sind U_1 und U_2 Unterräume von V, dann gilt

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \,:\, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

Aufgabe P.4

Beweisen Sie: Sind U_1, U_2 und U_3 Unterräume eines Vektorraumes V und $U_1 \subseteq U_3$, dann gilt

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3.$$

Hausaufgaben (Abgabe am 05.12. in der Vorlesung)

Aufgabe H.1 (4=1+1+1+1 Punkte)
Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear sind und welche nicht. Begründen Sie Ihre Antworten.

a)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

c)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}.$$

d)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x+y^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H.2 (4 Punkte)
Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bildet einen eindimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum, aber auch einen zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Geben Sie eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die linear ist, wenn Sie $\mathbb{C}$ als einen $\mathbb{R}$-Vektorraum interpretieren, aber nicht linear, wenn Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum auffassen. Begründen Sie Ihre Auswahl.

Aufgabe H.3 (4 Punkte)
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: $\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W.

Aufgabe H.4 (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.

(ii) Wenn $f(f(v)) = 0$, dann gilt $f(v) = 0$.