Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. A. Pott, C. Kaspers, A. Polujan, U. Risch

Wintersemester 2019/20
05. Dezember 2019

Übungsblatt 8

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$.

Aufgabe P.2

Seien $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ zwei Matrizen, die in jeder Zeile und Spalte genau einen Eintrag 1 haben und sonst alle Einträge 0. Begründen Sie,

a) warum $\mathbf{PQ}$ auch eine Matrix ist, die in jeder Zeile und Spalte genau einen Eintrag 1 hat und sonst nur 0en,

b) warum $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ invertierbar sind.

Aufgabe P.3

Sei V der Vektorraum $\mathbb{K}^{(n,n)}$. Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{(n,n)}$ eine fest gewählte Matrix. Zeigen Sie, dass $f_{\mathbf{B}} : V \to V$ mit $f_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}) = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe P.4

Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

a) Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig, dann sind auch $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear abhängig.

b) Sind $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig, dann sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

c) In **a)** und **b)** gilt die Umkehrung im Allgemeinen nicht.

Hausaufgaben (Abgabe am 12.12. in der Vorlesung)

Aufgabe H.1 (4=2+2 Punkte)

a) Geben Sie eine Abbildung $f : V \to W$ an, für die $f(0) = 0$ gilt sowie $f(v + w) = f(v) + f(w)$ für alle $v, w \in V$, die aber nicht linear ist.

b) Geben Sie eine Abbildung $g : V \to W$ an, für die $g(\lambda v) = \lambda g(v)$ für alle $v \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$ gilt, die aber nicht linear ist.

Aufgabe H.2 (4=3+1 Punkte)

Sei

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3.$$

a) Geben Sie, falls möglich, für $n = 1, 2$ und 3 jeweils lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ an mit $\mathrm{Bild}(f) = U$. Wenn dies nicht möglich ist, geben Sie bitte einen Grund an.

b) Bestimmen Sie in **a)** jeweils $\dim(\mathrm{Kern}(f))$.

Aufgabe H.3 (4=2+2 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Anzahl aller linearen Abbildungen $\mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$.

b) Geben Sie explizit alle bijektiven linearen Abbildungen $\mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^2$ an.

Aufgabe H.4 (4=2+2 Punkte)

a) Es seien V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume. Zeigen Sie: Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und gilt $\dim V = \dim W$, so ist f injektiv genau dann wenn f surjektiv ist.

b) Sei

$$V := \left\{ \sum_i a_i x^i \ : \ a_i \in \mathbb{K}, \text{ nur endlich viele } a_i \neq 0 \right\}$$

die Menge aller Polynome. Diese Menge ist mit der Addition

$$\sum_i a_i x^i + \sum_i b_i x^i := \sum_i (a_i + b_i) x^i$$

und skalaren Multiplikation

$$\lambda \cdot \sum_i a_i x^i := \sum_i (\lambda a_i) x^i$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. *(Dieser Vektorraum V ist nicht endlich erzeugt. Das wurde in der Vorlesung diskutiert und Sie müssen dies nicht mehr zeigen!)*

- Geben Sie eine lineare Abbildung $f : V \to V$ an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.
- Geben Sie eine lineare Abbildung $g : V \to V$ an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.