Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. A. Pott, C. Kaspers, A. Polujan, U. Risch

Wintersemester 2019/20
12. Dezember 2019

Übungsblatt 9

Präsenzaufgaben

Aufgabe P.1

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f sowohl bezüglich der kanonischen Basis als auch bezüglich der geordneten Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P.2

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $f : V \to V$ linear. Ferner seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V, $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine bijektive Abbildung und $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine weitere geordnete Basis von V mit $c_i := b_{\pi(i)}$. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen

$$[f]_B^B, \quad [f]_B^C, \quad [f]_C^B \quad \text{und} \quad [f]_C^C.$$

Aufgabe P.3

Bestimmen Sie den Zeilenrang der Matrix $\mathbf{B} := (\beta_{i,j})$ in $\mathbb{R}^{(n,n)}$ mit

$$\beta_{i,j} = \begin{cases} a & \text{wenn } i = j \\ b & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Der **Zeilenrang** ist hierbei die Dimension des Vektorraumes, der von den Zeilen von $\mathbf{B}$ erzeugt wird.

Hausaufgaben (Abgabe am 19.12. in der Vorlesung)

Aufgabe H.1 (4=1+3 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

erklärt ist.

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis $C = (\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix})$ an.

b) Geben Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der kanonischen Basis an.

Aufgabe H.2 (4=1+3 Punkte)
Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$, und sei $\mathbf{J}_n \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ die Matrix, deren sämtliche Einträge 1 sind.

a) Zeigen Sie, dass $C = (c_1, \ldots, c_n)$ eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^n$ ist, wobei $c_1 := e_1 + \ldots + e_n$ und $c_i = e_1 - e_i$ für $i = 2, \ldots, n$ ist.

b) Sei $\mathbf{A} := (a-b)\cdot\mathbf{I}_n + b\cdot\mathbf{J}_n$. Bestimmen Sie eine Darstellungsmatrix von $f_{\mathbf{A}}$ bezüglich der Basis C aus **a)**, d. h., bestimmen Sie $[f_{\mathbf{A}}]_C^C$.

Aufgabe H.3 (4=2+2 Punkte)
Geben sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2 & 2 & \alpha\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar.

b) Bestimmen Sie $\mathbf{A}^{-1}$ für $\alpha = 5$.

Aufgabe H.4 (4=2+2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $f \circ f = -\mathrm{id}$, aber $f \neq \mathrm{id}$, also f ist nicht die identische Abbildung. Zeigen Sie, dass für jede solche Abbildung f gilt:

a) Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann gibt es eine Basis B_f von $\mathbb{R}^2$, bezüglich der f die Darstellungsmatrix

$$[f]_{B_f}^{B_f} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

b) Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann gibt es eine Basis C_f von $\mathbb{C}^2$, bezüglich der f die Darstellungsmatrix

$$[f]_{C_f}^{C_f} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

hat.